



Titulació:

**Ingeniería Aeronáutica**

Alumno (nombre y apellidos):

**Marc Espuga Zaragoza**

Título PFC:

**Modelización y control LPV de un helicóptero a dos grados de libertad**

Director del PFC:

**Fatiha Nejari Akhi-Elarab**

Convocatoria de entrega del PFC

**Cuatrimestre de otoño – Enero 2011**

Contenido del volumen:

**-MEMORIA-**

---



**Título :** Modelización y control LPV de un helicóptero a dos grados de libertad

**Autor:** Marc Espuga Zaragoza

**Director:** Fatiha Nejari Akhi-Elarab

**Data:** 16 de marzo de 2011

## Resumen

Este proyecto final de carrera considera los sistemas *linear parameter varying*, *LPV* como herramienta de modelado de un helicóptero a dos grados de libertad, el *Twin Rotor MIMO System*, *TRMS*. El sistema LPV es representado en espacio de estados como un familia de modelos linealizados en distintos puntos de funcionamiento.

Una vez obtenido el modelo LPV, éste es utilizado para la síntesis de un observador de estado y el diseño de un controlador por realimentación de estado del TRMS. En el diseño del observador y del controlador se ha hecho uso de las desigualdades lineales matriciales, LMI. El formalismo de las LMI permite el uso de métodos numéricos para la asignación de polos que se usan en la síntesis de leyes de control.



**Title :** LPV modeling and control of a two freedom degrees helicopter

**Author:** Marc Espuga Zaragoza

**Director:** Fatiha Nejari Akhi-Elarab

**Date:** March 16, 2011

## Overview

This final project considers the systems *linear varying parameter, LPV* as a modeling tool for an helicopter with two degrees of freedom, the *Twin Rotor MIMO System, TRMS*. The LPV system is represented in state space as a family of linearized models at different operating points.

Once we have the LPV model, it is used for the synthesis of a state observer and design a state feedback controller of the TRMS. In the design of the observer and the controller has made use of linear matrix inequalities, LMI. The LMI formalism allows the use of numerical methods for the synthesis of observer and controller.



# ÍNDICE GENERAL

<b>INTRODUCCIÓN</b>	<b>1</b>
0.1. Objetivo del proyecto	2
0.2. Justificación	2
0.3. Contenido de los capítulos	3
<b>CAPÍTULO 1. Twin Rotor MIMO System, TRMS</b>	<b>5</b>
1.1. Descripción del sistema	5
1.2. Obtención del modelo no lineal	7
1.2.1. Motores CC	7
1.2.2. Modelado de las fuerzas aerodinámicas	9
1.2.3. Modelado mecánico del conjunto viga-rotor	11
1.2.4. Modelo no lineal	16
1.3. Validación del modelo	17
<b>CAPÍTULO 2. Modelos <i>Linear Parameter Varying</i>, LPV. Teoría y aplicación</b>	<b>25</b>
2.1. Sistemas LPV y Quasi-LPV	25
2.2. Obtención de un sistema LPV	26
2.2.1. Aproximación Jacobiana	26
2.2.2. Transformación de estado	28
2.2.3. Función de sustitución	30
2.2.4. Comparación entre las distintas técnicas de modelado LPV	32
2.3. Modelo LPV del TRMS	33
<b>CAPÍTULO 3. Diseño del observador de estado</b>	<b>39</b>
3.1. Observabilidad de un sistema	39
3.1.1. Observabilidad completa de estado	40
3.2. Diseño de observadores de estado	41
3.2.1. Observador de orden reducido	42

<b>3.3. Desigualdades lineales matriciales</b>	<b>44</b>
3.3.1. Asignación de polos mediante LMI	45
<b>3.4. Diseño del observador</b>	<b>47</b>
 <b>CAPÍTULO 4. Diseño del controlador</b>	 <b>57</b>
4.1. Controlabilidad de estado	57
4.2. Controlabilidad de la salida	58
4.3. Control por realimentación de estado	59
 <b>CAPÍTULO 5. Conclusiones</b>	 <b>67</b>
 <b>LISTA DE SÍMBOLOS</b>	 <b>69</b>
 <b>BIBLIOGRAFÍA</b>	 <b>71</b>
 <b>APÉNDICE A. Representación en espacio de estados sub-                                   modelos</b>	 <b>73</b>
 <b>APÉNDICE B. Código Matlab</b>	 <b>89</b>
B.1. Función de comparación	89
B.2. Función para el cálculo de las ganancias del observador de estado	91
B.3. Función para el cálculo de las ganancias del controlador	91



# ÍNDICE DE FIGURAS

1.1	TRMS . . . . .	6
1.2	Circuito equivalente de un motor CC . . . . .	7
1.3	Comportamiento mecánico de los motores . . . . .	8
1.4	Modelo fluido en el rotor . . . . .	9
1.5	Velocidades incidentes y configuración aerodinámica en un elemento de pala . . . . .	10
1.6	Fuerzas gravitatorias actuantes más distancias entre centros de gravedades	12
1.7	Fuerzas centrípetas actuantes . . . . .	13
1.8	Cable existente entre el mástil y la viga . . . . .	15
1.9	Modelo no lineal en <i>Simulink</i> . . . . .	18
1.10	Ángulo de cabeceo (entrada 1) . . . . .	20
1.11	Ángulo de guiñada (entrada 1) . . . . .	20
1.12	Ángulo de cabeceo (entrada 2) . . . . .	21
1.13	Ángulo de guiñada (entrada 2) . . . . .	21
1.14	Ángulo de cabeceo (entrada 3) . . . . .	22
1.15	Ángulo de guiñada (entrada 3) . . . . .	22
1.16	Ángulo de cabeceo (entrada 4) . . . . .	23
1.17	Ángulo de guiñada (entrada 4) . . . . .	23
1.18	Ángulo de cabeceo (entrada 5) . . . . .	24
1.19	Ángulo de guiñada (entrada 5) . . . . .	24
2.1	Herramienta <i>Linear Analysis</i> de <i>Matlab</i> . . . . .	35
2.2	Fragmento en <i>Simulink</i> del modelo LPV . . . . .	37
2.3	<i>Simulink</i> del Modelo 1 en espacio de estados . . . . .	38
3.1	Concepto de observador de estado . . . . .	39
3.2	Sistema con observador de estado . . . . .	42
3.3	Observador de orden reducido . . . . .	43
3.4	Región LMI. Disco . . . . .	46
3.5	Región LMI. Sector cónico . . . . .	47
3.6	Región LMI. Tiras verticales . . . . .	47
3.7	<i>Simulink</i> del Modelo 1 en espacio de estados con el observador . . . . .	49
3.8	Ángulo de cabeceo (entrada 1) . . . . .	50
3.9	Ángulo de guiñada (entrada 1) . . . . .	51
3.10	Ángulo de cabeceo (entrada 2) . . . . .	51
3.11	Ángulo de guiñada (entrada 2) . . . . .	52
3.12	Ángulo de cabeceo (entrada 3) . . . . .	52
3.13	Ángulo de guiñada (entrada 3) . . . . .	53
3.14	Ángulo de cabeceo (entrada 4) . . . . .	53
3.15	Ángulo de guiñada (entrada 4) . . . . .	54
3.16	Ángulo de cabeceo (entrada 5) . . . . .	54
3.17	Ángulo de guiñada (entrada 5) . . . . .	55
4.1	Sistema con realimentación de estado . . . . .	60

4.2 Salida deseada por el modelo no lineal . . . . .	63
4.3 Acción de control . . . . .	63
4.4 Respuesta del sistema a la salida deseada. Ángulo de cabeceo . . . . .	64
4.5 Ampliación de la respuesta del sistema para el ángulo de cabeceo . . . . .	64
4.6 Respuesta del sistema a la salida deseado. Ángulo de guiñada . . . . .	65
4.7 Fragmento en <i>Simulink</i> de la estrategia de control . . . . .	66
4.8 <i>Simulink</i> del controlador del Modelo 1 . . . . .	66

# ÍNDICE DE TABLAS

1.1 Principales diferencias entre un TRMS y un helicóptero . . . . .	5
1.2 Parámetros del modelo no lineal . . . . .	17
1.3 Características del conjunto de entradas . . . . .	19
2.1 Puntos de operación batería submodelos . . . . .	33
2.2 Valores en el equilibrio para cada submodelo . . . . .	36
4.1 Salida deseada . . . . .	62



# INTRODUCCIÓN

El helicóptero es una aeronave que en la actualidad tiene un uso importante en nuestra sociedad. Dentro de las posibilidades que ofrece nos encontramos con el transporte de personas, el uso medicalizado, la extinción de incendios, control del tráfico, etcétera.

La irrupción del helicóptero tal y como lo conocemos hoy en día data de mediados del siglo XX, no obstante la idea del vuelo vertical se remontan a la antigua China en el 400 A.C. con un pequeño juguete que consistía en plumas en el extremo de un palo que se hacía girar rápidamente entre las manos para generar sustentación y luego se dejaba volar libremente, aunque esto no es más que un juguete es tal vez la primera muestra tangible de lo que hoy entendemos por un helicóptero. Es evidente que para poder alcanzar el estado actual del helicóptero han pasado más de dos milenios y numerosos avances en el conocimiento fueron necesarios. La invención del motor de combustión interna de principios del siglo pasado y la comprensión de los fenómenos aerodinámicos fueron fundamentales para llevar a cabo con éxito el primer vuelo en helicóptero controlado.

Llegados a este punto los avances han ido en la dirección de las ayudas al pilotaje y al confort de los pasajeros. Es aquí donde los sistemas de control toman un papel protagonista. El control de un helicóptero es un problema de ingeniería retador ya que es un sistema con unas no linealidades grandes con acoplamiento en el movimiento de los distintos ejes.

En este proyecto final de carrera se estudia el problema de control de un helicóptero a dos grados de libertad, a partir de un modelo de laboratorio simplificado, el *twin rotor mimo system*, *TRMS*, desarrollado por Feedback Instruments Ltd. El TRMS guarda gran similitud con el comportamiento de un helicóptero, sigue siendo un sistema altamente no lineal con acoplamiento de movimiento entre sus ejes, aunque presenta simplificaciones importantes en el control frente a un helicóptero:

- El TRMS es un sistema de dos grados de libertad mientras que un helicóptero tiene seis.
- El control del sistema se hace por la variación de la velocidad de rotación de los rotores, mientras que en el helicóptero se ejerce por el cambio de paso del ángulo de ataque de las palas de los rotores y por el movimiento longitudinal y lateral de la cabeza del rotor principal.
- En el TRMS no hay movimiento de batimiento ni de arrastre.

Además de los problemas de modelado que pueda presentar la dinámica del TRMS, encontramos problemas característicos de la teoría de control en espacio de estados como la inaccesibilidad a medidas de algunos de los estados y salidas del sistema.

## 0.1. Objetivo del proyecto

El objetivo principal del proyecto es diseñar un sistema de control para el TRMS a partir de un modelo LPV. Para ello se han marcado las siguientes metas:

- Elaborar un modelo no lineal del sistema.
- Validar el modelo obtenido con datos experimentales y/o numéricos.
- Elaborar un modelo lineal del sistema mediante modelos *linear parameter varying, LPV*.
- Validar el modelo lineal obtenido frente al modelo no lineal.
- Diseñar un observador de estado para estimar todas las variables de estado y salidas no accesibles.
- Diseñar el sistema de control.

## 0.2. Justificación

Un helicóptero es una aeronave compleja que requiere mucho trabajo por parte del piloto, es por eso que el estudio de sistemas de control que ayuden a facilitar el pilotaje es una buena idea. Por otra parte y fuera del uso convencional de los helicópteros donde el piloto interactúa con la máquina están los aviones no tripulados, UAV, donde la falta de piloto hace totalmente imprescindible la figura del sistema de control, es por esto que todo estudio en la vía de los sistemas de control está totalmente justificado.

En los últimos años el uso de las técnicas LPV en el diseño de sistemas de control están tomando una papel importante y han sido muchos los casos donde han tenido éxito. En la bibliografía se pueden encontrar ejemplos de diseño de sistemas de control mediante técnicas LPV en aviones de combate, misiles tierra-aire, brazos mecánicos, etcétera. Además los modelos LPV son una buena aproximación al modelo no lineal ya que al trabajar en varios puntos de operación no se pierde tanta información del sistema como cuando se trabaja con modelos lineales, por otra parte tiene la ventaja de poder aplicar las técnicas de control lineal sobre el modelo LPV. Es por eso que el uso de esta técnica para el control del TRMS es una buena idea.

Desde un punto de vista social toda innovación o mejora en las sistemas de control repercute en beneficios para ésta, ya que mediante éstos se mejoran facetas del día a día, que permiten que nuestros esfuerzos se centren en tareas no rutinarias o bien aportan comodidades de las que no podíamos disfrutar anteriormente.

### 0.3. Contenido de los capítulos

El proyecto se ha dividido en cinco capítulos de acuerdo a los objetivos marcados:

- Capítulo 1. Descripción general del TRMS donde se incluyen sus características de funcionamiento desde el punto de vista del control. Se realiza el modelo no lineal del sistema y por último se valida el modelo obtenido a partir de datos de referencia.
- Capítulo 2. Introducción a los sistemas LPV y a las distintas técnicas existentes para la obtención de los mismos. Obtención de modelo LPV del TRMS mediante una de las técnicas descritas anteriormente.
- Capítulo 3. Introducción al concepto de observador de estado, uso de las desigualdades lineales matriciales, LMI en el diseño de observadores de estado. Diseño y presentación de los resultados obtenidos por el observador de estado del TRMS.
- Capítulo 4. Introducción al diseño de controladores mediante realimentación de estados, uso de las LMI para el diseño de controladores. Diseño y presentación de los resultados obtenidos por el controlador para el TRMS.
- Capítulo 5. Conclusiones del proyecto.





# CAPÍTULO 1. TWIN ROTOR MIMO SYSTEM, TRMS

En este capítulo vamos a introducir al lector en el sistema estudiado, se realizará una descripción detallada del mismo y de su funcionamiento. Además se realizará un modelo matemático del mismo. Este modelo lo obtendremos de la subdivisión del sistema en modelos reducidos de los cuales conocemos su comportamiento. Esta subdivisión nos permitirá reducir la complejidad del modelado del sistema.

## 1.1. Descripción del sistema

El Twin Rotor Mimo System, TRMS, es un sistema de laboratorio desarrollado por Feedback Instruments Ltd. En ciertos aspectos podemos decir que su comportamiento es similar al de un helicóptero. Por ejemplo un acople grande entre el movimiento vertical (rotor principal) y el movimiento horizontal (rotor de cola). A pesar de estas similitudes también hay diferencias destacables. En la siguiente tabla se listan las principales diferencias.

	TRMS	Helicóptero
<b>Punto de pivote</b>	Entre los dos rotores	Cabeza del rotor principal
<b>Generación de la sustentación</b>	Velocidad de rotación del rotor principal	Variación AoA de las palas
<b>Guiñada controlada por</b>	Velocidad de rotación del rotor de cola	Variación AoA de las palas
<b>Control cíclico</b>	No	Si

Tabla 1.1: Principales diferencias entre un TRMS y un helicóptero

El sistema, representado en la figura 1.1, está compuesto por una viga pivotada en su base de manera que ésta puede rotor libremente en el plano vertical y horizontal. Estos movimientos se consiguen por las fuerzas aerodinámicas generadas por ambos rotores ubicados cada uno en los de los extremos de la viga, la disposición de los mismos es a 90 grados el uno respecto del otro. El sistema está equipado con un contrapeso pendular unido a la viga principal el cual permite controlar el momento angular en estado estacionario o con carga. Además la viga principal está bloqueada de tal manera que el movimiento de balanceo está impedido.

Como hemos dicho anteriormente el TRMS está equipado con dos rotores. El rotor principal se encarga de generar el empuje vertical el cual permite el movimiento

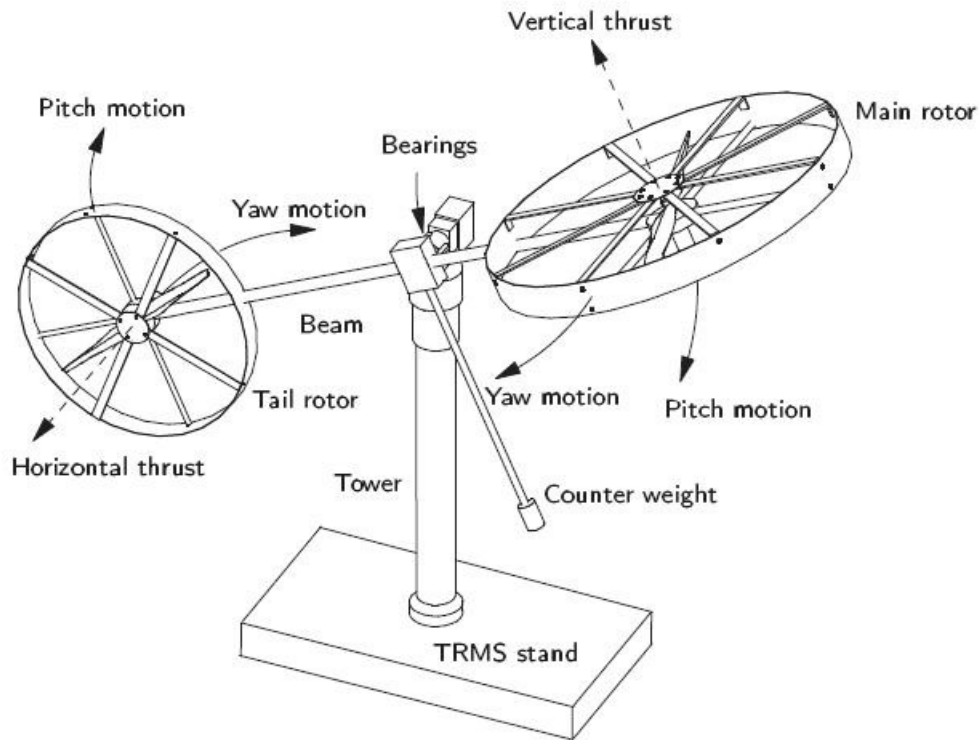


Figura 1.1: TRMS

de cabeceo (pitch en inglés), rotación en el plano vertical alrededor del eje Y. Y el rotor de cola que genera el empuje horizontal dotando al sistema del movimiento de guiñada (yaw en inglés), rotación en el plano horizontal respecto al eje Z.

Las variables que nos permiten describir el estado de la viga son: los ángulos de guiñada ( $\psi$ ) y cabeceo ( $\theta$ ) medidos por sensores de posición ubicados en el punto sobre el que pivota la viga principal y el momento angular horizontal ( $H_h$ ) y vertical ( $H_v$ ). Además hemos de tener en cuenta cuatro variables más, las velocidades angulares de los rotores ( $\omega_m$  y  $\omega_t$ ), medidas por tacogeneradores acoplados con los motores de corriente continua que accionan los rotores, y las intensidades de éstos ( $i_m$  y  $i_t$ ).

En un helicóptero convencional, las fuerzas aerodinámicas están controladas por el cambio del ángulo de ataque de las palas, mediante el uso del colectivo para el rotor principal y mediante el uso de los pedales para el rotor de cola. El TRMS está construido de tal manera que el ángulo de ataque de las palas es fijo. Así pues las fuerzas aerodinámicas son controladas por la variación de la velocidad de los rotores. De manera que las entradas de control serán los voltajes suministrados a ambos rotores ( $U_m$  y  $U_t$ ). Un cambio en el voltaje suministrado a los motores resulta en un cambio de la velocidad de rotación del rotor, y esto repercute en un cambio en la fuerza aerodinámica, lo que a su vez repercute en un cambio de posición del sistema.

## 1.2. Obtención del modelo no lineal

La estrategia para obtener el modelo no lineal será la de considerar los distintos subsistemas que integran el TRMS por separado, de manera que podamos abordar el modelado de una forma más sencilla. Realizando un pequeño análisis del TRMS podemos identificar tres grandes grupos: el modelado de los motores, el modelado de la tracción generada por cada uno de los rotores y por último el modelado del conjunto mecánico viga-rotores.

### 1.2.1. Motores CC

El modelo no lineal de los motores surge de la acción combinada de las características mecánicas y eléctricas de éstos. Los motores que accionan cada uno de los rotores son idénticos en funcionamiento, solo se diferencian por las cargas mecánicas. Hecho por el cual solo se van a desarrollar las ecuaciones gobernantes para uno de ellos.

Desde el punto de vista eléctrico podemos idealizar el motor mediante una resistencia, una inductancia y la fuerza electromotriz generada. Este sistema idealizado se muestra en la figura 1.2.

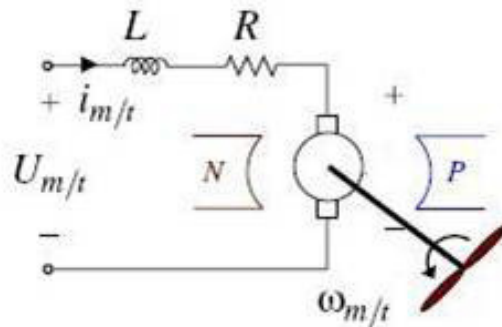


Figura 1.2: Circuito equivalente de un motor CC

Aplicando la ley de tensiones de Kirchhoff al circuito equivalente obtenemos la siguiente ecuación diferencial para el comportamiento eléctrico de los motores horizontal y vertical.

$$\frac{di_t}{dt} = \frac{U_t - k_a \omega_t - Ri_t}{L} \quad (1.1)$$

$$\frac{di_m}{dt} = \frac{U_m - k_a \omega_m - Ri_m}{L} \quad (1.2)$$

La parte mecánica de los motores consiste en un eje conectado directamente al rotor.

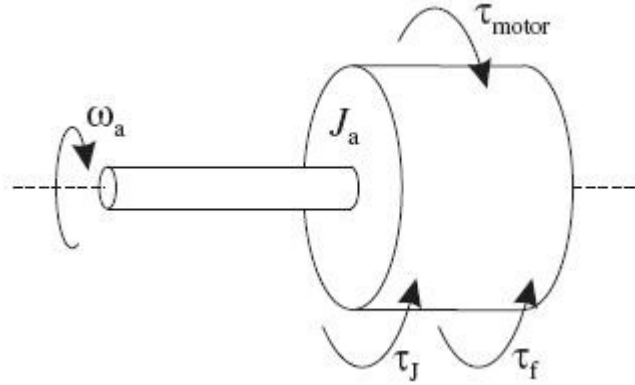


Figura 1.3: Comportamiento mecánico de los motores

En la figura 1.3 vemos los distintos momentos aplicados al eje, donde  $\tau_J$  es el momento debido a la aceleración angular,  $\tau_f$  el momento debido a la fricción y  $\tau_{motor}$  el momento debido a la carga mecánica. Atendiendo al momento debido a la fricción sabemos que la fricción se puede dividir en tres tipos; fricción viscosa, estática y de Coulomb.

- La fricción viscosa representa una fuerza que tiene una relación lineal entre la fuerza aplicada y la velocidad.
- La fricción estática representa una fuerza que tiende a impedir el movimiento inicial, una vez inicia el movimiento ésta desaparece.
- La fricción de Coulomb es una fuerza que tiene una amplitud constante con respecto al cambio de la velocidad.

No obstante las tres componentes de la fricción vamos a asumir que solo tiene un papel importante la fricción viscosa. Por último deberemos tener en cuenta el momento electromagnético. Aplicando  $\sum M = 0$  tendremos la siguiente ecuación para el comportamiento mecánico de los motores horizontal y vertical:

$$\frac{d\omega_t}{dt} = \frac{k_a i_t - k_{th} \text{sign}(\omega_t) \omega_t^2 - B_t \omega_t}{J_{tr}} \quad (1.3)$$

$$\frac{d\omega_m}{dt} = \frac{k_a i_m - k_{tv} \text{sign}(\omega_m) \omega_m^2 - B_m \omega_m}{J_{mr}} \quad (1.4)$$

### 1.2.2. Modelado de las fuerzas aerodinámicas

En esta sección vamos a explicar como se genera la fuerza de tracción en los rotores del sistema que permiten el movimiento de cabeceo y guiñada del mismo. Además se desarrollará un modelo para poder determinar dichas fuerzas.

En la sección 1.1. se han descrito las diferencias existentes entre el TRMS y un helicóptero. La principal diferencia de las expuestas es que en el TRMS el paso de las palas es fijo y el control sobre la magnitud de la tracción generada por los rotores es función de la velocidad de rotación de estos. A pesar de esta diferencia los principios para describir la generación de dicha tracción son los mismos, es por ello que vamos a basarnos en la teoría aerodinámica de los helicópteros.

El empuje generado por un rotor surge del movimiento de una masa de aire a través de él, ver figura 1.4. En términos de las leyes de conservación de la energía, esto significa que el rotor experimenta una fuerza en la dirección contraria al aire acelerado por éste. Esta fuerza recibe el nombre de empuje.

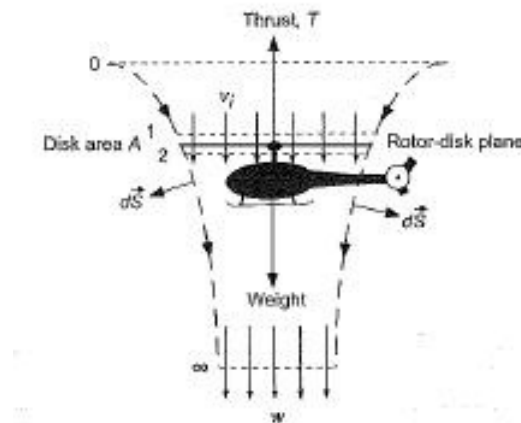


Figura 1.4: Modelo fluido en el rotor

Para calcular el empuje generado por un rotor podemos usar la teoría de conservación de momento o la teoría de elemento de pala. Nosotros utilizaremos la segunda de ellas.

La teoría de elemento de pala permite realizar estimaciones radiales de las fuerzas actuantes en el rotor. Dicha teoría presupone que cada sección de pala actúa como un perfil bidimensional que produce fuerzas aerodinámicas y momentos. El comportamiento global del rotor lo podremos obtener mediante la integración de las cargas aerodinámicas de las distintas secciones. Dicha teoría realiza las siguientes simplificaciones:

- La influencia de las cargas aerodinámicas de secciones adyacentes son despreciables en la sección de estudio.
- Cada sección de pala se comporta como un perfil 2-D.

En la figura 1.5 podemos ver de forma esquemática las condiciones fluidas y las fuerzas aerodinámicas representativas en un elemento de pala. Sabemos que todo perfil genera una fuerza perpendicular a la dirección de la velocidad incidente sobre éste llamada sustentación. Además también se produce otra fuerza perpendicular a la sustentación llamada resistencia. La resultante de ambas fuerzas es la fuerza aerodinámica generada por el perfil. Descomponiendo dicha fuerza en unos ejes rectangulares obtendremos las fuerzas perpendiculares y paralelas al plano del rotor. La fuerza en el eje vertical recibe el nombre de tracción. Atendiendo a la figura 1.5 tenemos:

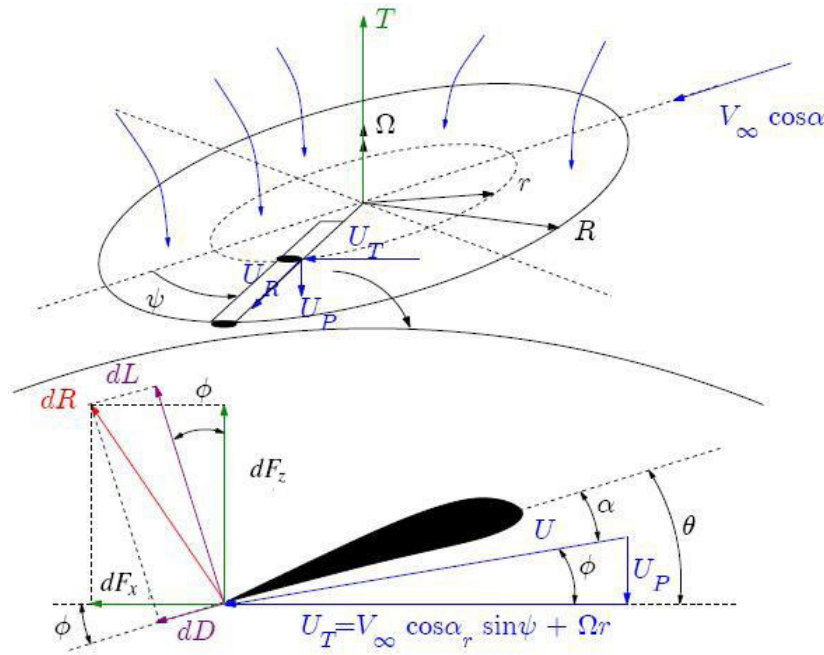


Figura 1.5: Velocidades incidentes y configuración aerodinámica en un elemento de pala

$$dF_z = dL \cos \phi - dD \sin \phi$$

$$dF_x = dL \sin \phi + dD \cos \phi$$

Así pues las contribuciones de empuje, torque y potencia del rotor serán:

$$dT = N_b dF_z$$

$$dQ = N_b dF_x r$$

$$dP = N_b dF_x \omega r$$

Para poder calcular en el empuje únicamente es necesario sustituir el valor de las fuerzas diferenciales de sustentación, de resistencia y de las velocidades del problema podríamos calcular la tracción generada por el rotor. Una vez llegados a este

punto el problema estaría cerrado, no obstante éste presenta incógnitas añadidas de las que aun no hemos hablado.

El movimiento del aire a través del rotor genera una velocidad inducida que no es conocida y se tiene que calcular. En función de la fase de operación del rotor esta tarea puede ser más sencilla o más complicada. Considerando la situación más genérica, vuelo en avance, sabemos que la velocidad inducida generada por el rotor varía en función del radio. Hay distintas aproximaciones para solucionar este problema tales como proponer modelos de velocidad inducida lineales o el modelo propuesto por Mangler y Squire [16]. Así vemos que el cálculo de la tracción generada por un rotor no es un problema sencillo es por eso que vamos a utilizar una aproximación más sencilla al problema del cálculo de la tracción. Dicha aproximación es la propuesta en [1] donde se considera que la tracción será una constante,  $k_{T_{mp}}$ ,  $k_{T_{mn}}$ ,  $k_{T_{tp}}$  o  $k_{T_{tn}}$ , en función del signo de la velocidad de rotación del rotor y del rotor en cuestión multiplicada por la velocidad de rotación del rotor en cuestión al cuadrado:

$$T_m = \begin{cases} k_{T_{mp}} \text{sign}(\omega_m) \omega_m^2 & \text{si } \omega_m \geq 0 \\ k_{T_{mn}} \text{sign}(\omega_m) \omega_m^2 & \text{si } \omega_m < 0 \end{cases} \quad (1.5)$$

$$T_t = \begin{cases} k_{T_{tp}} \text{sign}(\omega_t) \omega_t^2 & \text{si } \omega_t \geq 0 \\ k_{T_{tn}} \text{sign}(\omega_t) \omega_t^2 & \text{si } \omega_t < 0 \end{cases} \quad (1.6)$$

### 1.2.3. Modelado mecánico del conjunto viga-rotor

En esta sección vamos a obtener el modelo matemático de todo el conjunto, para ello, vamos a usar una aproximación Newtoniana. Para obtener el modelo se calculan los distintos momentos e inercias que actúan en el sistema. Para ello vamos a estudiar el problema en dos partes una centrada en el movimiento alrededor del plano vertical y la otra referente al movimiento en el plano horizontal.

#### 1.2.3.1. Movimiento en el plano vertical

En el estudio del movimiento alrededor del plano vertical podemos identificar los distintos momentos:

- Momento debido a la fuerza de la gravedad.
- Momento provocado por la fricción.
- Momento provocado por la fuerza centrípeta debida a la rotación de la viga.
- Momento giroscópico.
- Momento provocado por la tracción del rotor principal.

Una vez tengamos identificados los distintos momentos involucrados aplicamos la segunda ley de Newton al sistema para tener totalmente caracterizado el movimiento alrededor del plano vertical.

$$\sum M = \frac{dH_v}{dt}$$

Para el cálculo del momento debido a la fuerza de la gravedad vamos a considerar cada una de las partes del sistema por separado concentrando su peso en el centro de gravedad de las mismas. En la figura 1.6 vemos esta división con las distancias existentes entre cada uno de los centros de gravedad y la fuerzas.

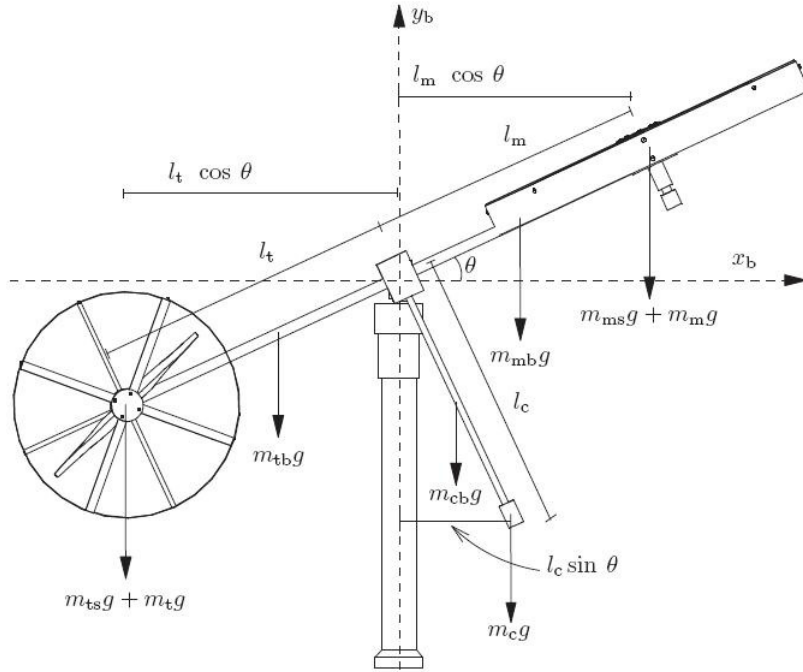


Figura 1.6: Fuerzas gravitatorias actuantes más distancias entre centros de gravedades

Así pues atendiendo al esquema de la figura anterior llegamos a la siguiente expresión para el momento gravitatorio:

$$M_{gra} = g[(A - B)\cos\theta - C\sin\theta] \quad (1.7)$$

donde,

$$\begin{aligned} A &= \left( \frac{m_{tb}}{2} + m_{ts} + m_t \right) l_t \\ B &= \left( \frac{m_{mb}}{2} + m_{ms} + m_m \right) l_m \\ C &= \left( \frac{m_{cb}}{2} + m_c \right) l_c \end{aligned}$$



Para el cálculo del momento provocado por la fricción al igual que en el caso del comportamiento mecánico del motor de corriente continua, vamos a considerar únicamente la fricción viscosa. Como ya hemos visto en ese mismo caso este es proporcional a la velocidad angular entonces expresaremos el momento como:

$$M_{fv} = -k_v \dot{\theta} \quad (1.8)$$

El momento debido a la fuerza centrífuga lo calcularemos de manera similar al de las fuerzas gravitatorias. Dividiremos el análisis en los efectos que se producen en el rotor principal, rotor de cola y contrapeso, en la figura 1.7 podemos ver un esquema. Centrémonos primero en el rotor principal, sabemos que la fuerza centrífuga se define como:

$$F_c = -m\omega^2 r$$

Y que esta tiene dirección radial al centro de giro, así pues no es difícil darse cuenta que la única componente que nos provocará momento es la que viene del giro de guiñada. Por contra la fuerza centrípeta del giro de cabeceo estará siempre alineada con el eje de giro y no hará momento. Así aplicando la definición de la fuerza centrífuga tendremos,

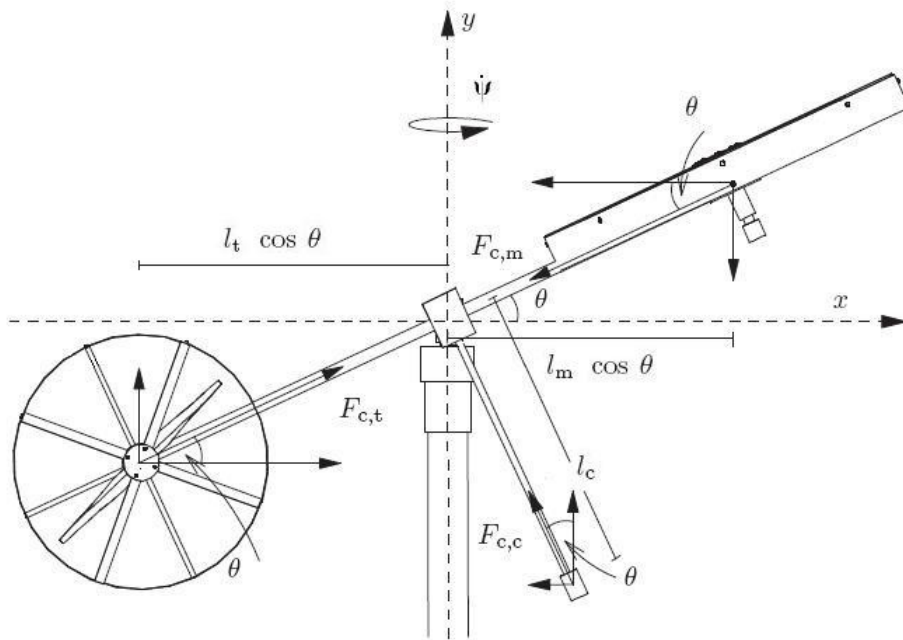


Figura 1.7: Fuerzas centrípetas actuantes

$$F_{c,m} = -\left(\frac{m_{tb}}{2} + m_{ts} + m_t\right) \dot{\psi}^2 l_m \cos \theta$$

Proyectando la expresión anterior y multiplicando por el brazo de palanca obtenemos el momento debido a la fuerza centrífuga para el rotor principal,

$$M_{F_{c,m}} = -\left(\frac{m_{tb}}{2} + m_{ts} + m_t\right) \dot{\psi}^2 l_m^2 \cos\theta \sin\theta = \frac{B}{2} l_m \sin 2\theta$$

Realizando el mismo proceso en el rotor de cola y en el contrapeso llegamos a la expresión final del momento de la fuerza centrífuga,

$$M_{F_c} = -\frac{D}{2} \dot{\psi}^2 \sin 2\theta \quad (1.9)$$

donde,

$$D = A l_t + B l_m + C l_c$$

El siguiente momento que tenemos que analizar es el causante por el efecto giroscópico. Dicho efecto surge cuando un cuerpo gira en torno a un eje móvil. Matemáticamente podemos expresar el efecto giroscópico como el producto vectorial de la velocidad angular por el momento cinético del cuerpo esto es  $F_g = \alpha \times J \omega$  además sabemos que la dirección del momento que produce dicha fuerza será perpendicular a los ejes de giro, así pues podremos expresar el momento giroscópico como:

$$M_g = k_g T_m \dot{\psi} \cos\theta \quad (1.10)$$

Por último hemos de tener en cuenta el momento que produce la tracción del rotor principal, en la sección anterior ya hemos caracterizado dicha fuerza y el momento únicamente consiste en la multiplicación de dicha fuerza por el brazo de palanca  $l_m$ .

$$M_m = T_m l_m \quad (1.11)$$

Sumando todos los momentos obtenidos en las ecuaciones 1.7, 1.8, 1.9, 1.10 y el momento de la fuerza aerodinámica tenemos que el momento neto en el plano vertical es:

$$M_v = g[(A - B)\cos\theta - C\sin\theta] - k_v \dot{\theta} - \frac{D}{2} \dot{\psi}^2 \sin 2\theta + k_g T_m \dot{\psi} \cos\theta + T_m l_m \quad (1.12)$$

Así pues el movimiento en el plano vertical del conjunto viga-rotor será:

$$\frac{dH_v}{dt} = g[(A - B)\cos\theta - C\sin\theta] - k_v \dot{\theta} - \frac{D}{2} \dot{\psi}^2 \sin 2\theta + k_g T_m \dot{\psi} \cos\theta + T_m l_m \quad (1.13)$$

### 1.2.3.2. Movimiento en el plano horizontal

Para el estudio del movimiento en el plano horizontal seguiremos el mismo proceso que en el caso del movimiento vertical. Primero identificaremos los distintos momentos que afectan al movimiento en dicho plano, una vez tengamos el momento neto actuante en el plano horizontal aplicaremos la segunda ley de Newton.

Los momentos actuantes en el plano horizontal son los siguientes:

- Momento debido a la tracción del rotor de cola.
- Momento provocado por la fricción.
- Momento provocado por el cable existente entre el mástil y la viga. La función de dicho cable es la de transmitir la energía eléctrica desde la base a los motores que accionan los rotores, en la figura 1.8 podemos ver el cable.



Figura 1.8: Cable existente entre el mástil y la viga

El momento provocado por la tracción al igual que en el plano vertical es el producto de la tracción del rotor de cola, caracterizada en la sección 1.2.2., por el brazo de palanca  $l_t$ .

$$M_t = T_t l_t \quad (1.14)$$

Para la caracterización del momento provocado por la fricción seguiremos las mismas hipótesis que en el caso del plano vertical, esto es, solo tendremos en cuenta la

fricción de carácter viscosa, así pues dicho momento será una constante de fricción,  $k_h$ , por la velocidad angular  $\dot{\psi}$ .

$$M_{fh} = -k_h \dot{\psi} \quad (1.15)$$

Para la caracterización del momento provocado por el cable utilizaremos el modelo propuesto en [1] donde se caracteriza como una constante,  $k_{fhp}$  o  $k_{fhn}$  en función del signo del ángulo de guiñada multiplicado por el mismo ángulo de guiñada, esto es:

$$M_{cable} = \begin{cases} k_{chp} \text{sign}(\psi) \psi & \text{si } \psi \geq 0 \\ k_{chn} \text{sign}(\psi) \psi & \text{si } \psi < 0 \end{cases} \quad (1.16)$$

El momento neto actuante en el plano horizontal será el sumatorio de cada uno de los momentos descritos anteriormente. Aplicando la segunda ley de newton tenemos la ecuación del movimiento para el plano horizontal:

$$\frac{dH_h}{dt} = T_t l_t - k_h \dot{\psi} - M_{cable} \quad (1.17)$$

#### 1.2.4. Modelo no lineal

Finalmente teniendo en cuenta todas las ecuaciones obtenidas en las secciones 1.2.1., 1.2.2. y 1.2.3. el modelo no lineal del TRMS será:

$$\frac{di_m}{dt} = \frac{U_m - k_a \omega_m - Ri_m}{L} \quad (1.18)$$

$$\frac{d\omega_m}{dt} = \frac{k_a i_m - k_{tv} \text{sign}(\omega_m) \omega_m^2 - B_m \omega_m}{J_m} \quad (1.19)$$

$$\frac{dH_v}{dt} = g[(A - B) \cos \theta - C \sin \theta] - k_v \dot{\theta} - \frac{D}{2} \dot{\psi}^2 \sin 2\theta + k_g T_m \dot{\psi} \cos \theta + T_m l_m \quad (1.20)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = H_v + \frac{k_t \omega_m}{J_v} \quad (1.21)$$

$$\frac{di_t}{dt} = \frac{U_t - k_a \omega_t - Ri_t}{L} \quad (1.22)$$

$$\frac{d\omega_t}{dt} = \frac{k_a i_t - k_{th} \text{sign}(\omega_t) \omega_t^2 - B_t \omega_t}{J_t} \quad (1.23)$$

$$\frac{dH_h}{dt} = T_t l_t - k_h \dot{\psi} - M_{cable} \quad (1.24)$$

$$\frac{d\psi}{dt} = H_h + \frac{k_m \omega_m \cos \theta}{D \cos^2 \theta + E \sin^2 \theta + F} \quad (1.25)$$

### 1.3. Validación del modelo

Una vez obtenido el modelo no lineal teórico el siguiente paso es la implementación de éste. Para ello se ha utilizado *Simulink*, en la figura 1.9 se muestra el modelo no lineal diseñado en *Simulink*. Durante el desarrollo teórico del modelo no lineal se ha hecho uso de una serie de parámetros de los que no hemos hablado hasta este punto, dichos parámetros caracterizan el comportamiento de nuestro modelo y por tanto es importante el conocimiento de los mismos para tener un comportamiento adecuado de nuestro modelo. La adquisición de estos parámetros se podría realizar mediante ensayos de laboratorio y técnicas de optimización. No obstante este no es el objetivo del proyecto, es por eso que hemos tomado los valores de [1]. En la tabla 1.2 se pueden ver los valores de los mismos:

Parámetro	Valor	Parámetro	Valor
$l_t$	0,282	$J_t$	$2,48 \cdot 10^{-5}$
$l_m$	0,246	$B_t$	$2,3 \cdot 10^{-5}$
$l_c$	0,290	$B_m$	$4,5 \cdot 10^{-5}$
$l_{cb}$	0,276	$k_{th}$	$5 \cdot 10^{-8}$
$r_{ms}$	0,155	$k_{tv}$	$5,6 \cdot 10^{-7}$
$r_{ts}$	0,1	$k_1$	6,5
$m_{tr}$	0,221	$k_2$	8,5
$m_{mr}$	0,236	$k_g$	0,2
$m_{cb}$	0,068	$k_v$	$1,31 \cdot 10^{-3}$
$m_t$	0,015	$k_h$	$4,7 \cdot 10^{-3}$
$m_m$	0,014	$k_{Ttp}$	$1,84 \cdot 10^{-6}$
$m_b$	0,022	$k_{Ttn}$	$2,20 \cdot 10^{-6}$
$m_{ts}$	0,119	$k_{Tmp}$	$1,62 \cdot 10^{-5}$
$m_{ms}$	0,219	$k_{Tmn}$	$1,08 \cdot 10^{-5}$
$R_a$	8	$k_t$	$2,6 \cdot 10^{-5}$
$L_a$	$0,86 \cdot 10^{-3}$	$k_m$	$2 \cdot 10^{-4}$
$k_a$	0,0202	$k_{chp}$	$8,54 \cdot 10^{-3}$
$J_{mr}$	$1,272 \cdot 10^{-4}$	$k_{chn}$	$7,686 \cdot 10^{-3}$

Tabla 1.2: Parámetros del modelo no lineal

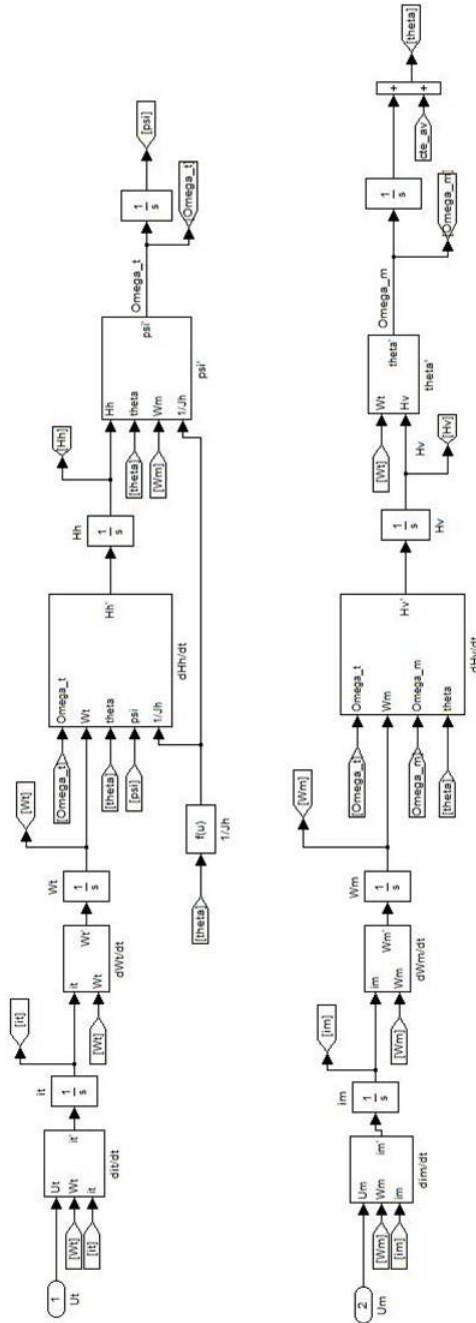


Figura 1.9: Modelo no lineal en Simulink

Para realizar la validación y dado de que tenemos acceso a la planta real del sistema podríamos realizar una adquisición de datos y a continuación se comparan éstos con los proporcionados por el modelo teórico diseñado. No obstante ésta no va a ser la técnica de validación que utilizaremos ya que tal y como hemos explicado antes nuestro modelo no está calibrado para la planta a la que nosotros tenemos acceso sino que lo está para la que han utilizado en [1]. En lugar de usar un proceso de validación estandar lo que haremos será comparar los resultados de nuestro modelo no lineal con los obtenidos por el modelo no lineal desarrollado en [1], ya que los resultados del modelo no lineal de [1] sí que han sido validados de forma satisfactoria con la planta real. Entonces si nuestro modelo no lineal tiene unos resultados satisfactorios frente al modelo no lineal de [1] podremos asegurar que también los tendrá frente a la planta real.

Para realizar la validación se van a introducir las mismas entradas que hay publicadas en [1], las cuales están en la tabla 1.3.

		<b>Tipo</b>	<b>Frecuencia (Hz)</b>	<b>Amplitud (V)</b>
<b>Entrada 1</b>	Rotor principal	Seno	0.5	1
	Rotor cola	Seno	0.5	0.5
<b>Entrada 2</b>	Rotor principal	Seno	1	2.5
	Rotor cola	Seno	1	2.5
<b>Entrada 3</b>	Rotor principal	Cuadrática	0.2	1
	Rotor cola	Cuadrática	0.5	1.5
<b>Entrada 4</b>	Rotor principal	Seno	0.5	1.5
	Rotor cola	Cuadrática	0.5	1.5
<b>Entrada 5</b>	Rotor principal	Cuadrática	0.2	1
	Rotor cola	Seno	0.5	2

Tabla 1.3: Características del conjunto de entradas

El resultado de las simulaciones llevadas a cabo se puede ver en las figuras 1.10 a la 1.19. Se puede observar que la respuesta que proporciona el modelo no lineal desarrollado es mejor en el ángulo de guiñada que en el de cabeceo, no obstante el error que presente en el ángulo de cabeceo es pequeño así que podemos decir que el modelo no lineal desarrollado proporciona una respuesta buena de acuerdo al modelo no lineal de [1] y consecuentemente podemos decir que también tiene una buena respuesta con la planta real.

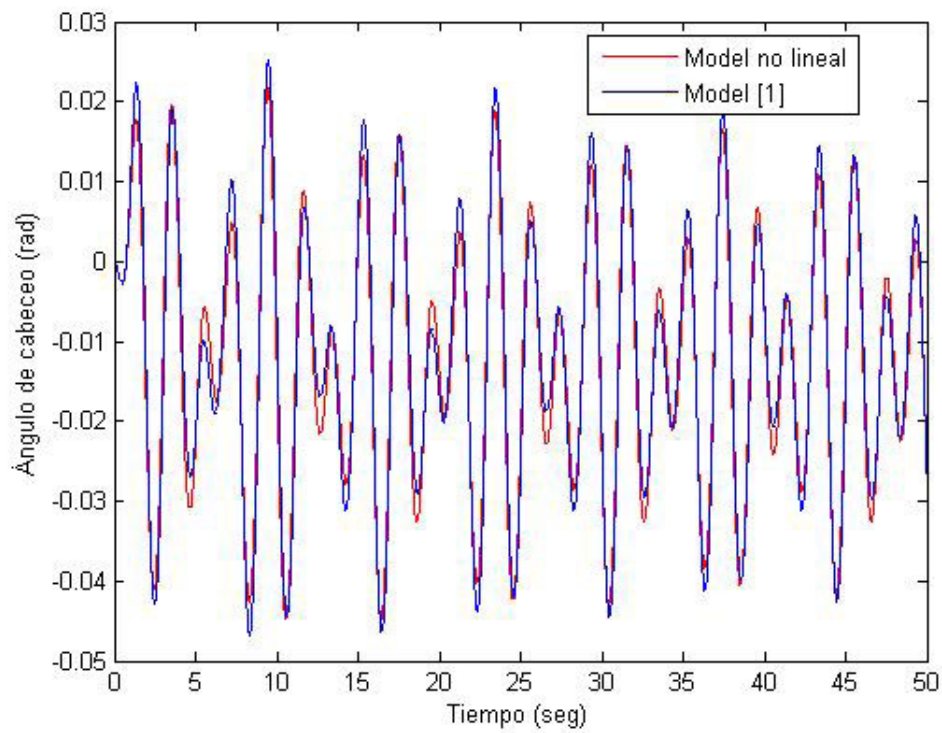


Figura 1.10: Ángulo de cabeceo (entrada 1)

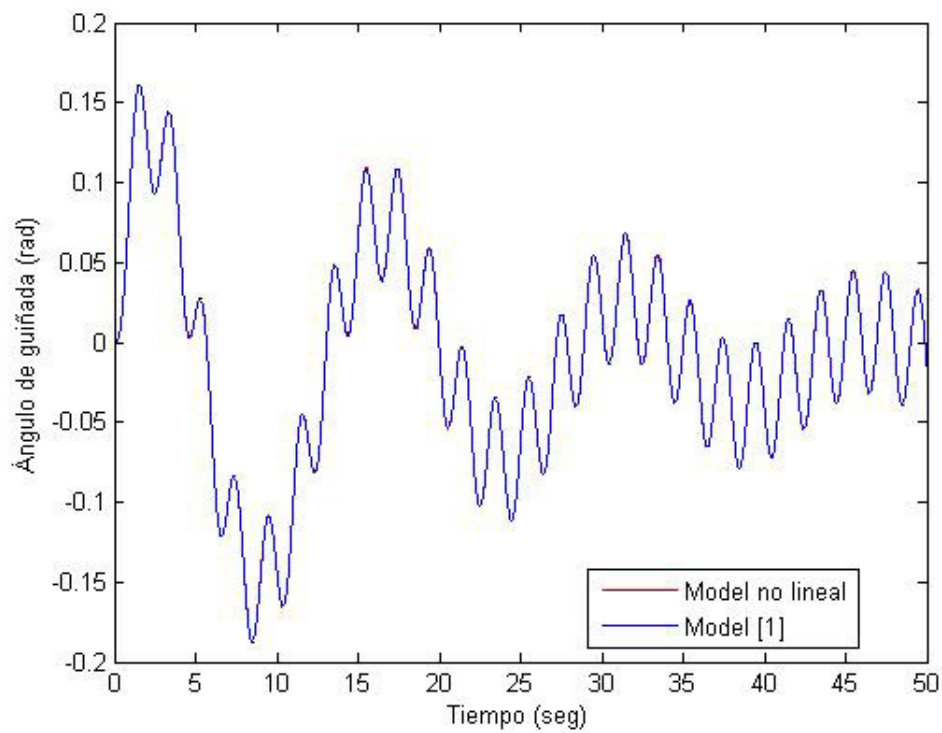


Figura 1.11: Ángulo de guiñada (entrada 1)



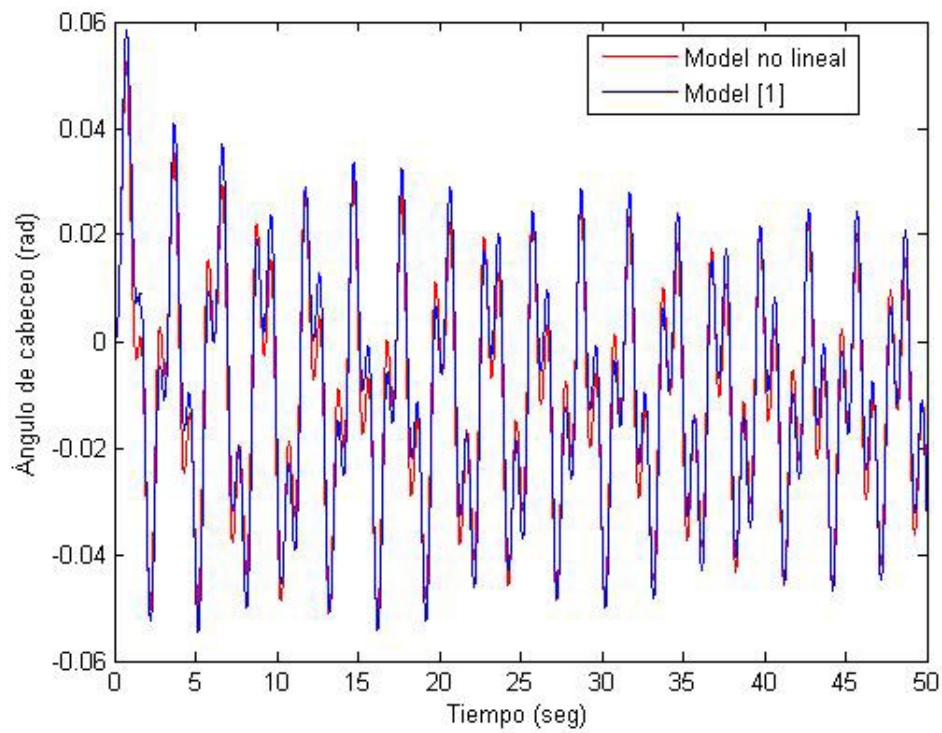


Figura 1.12: Ángulo de cabeceo (entrada 2)

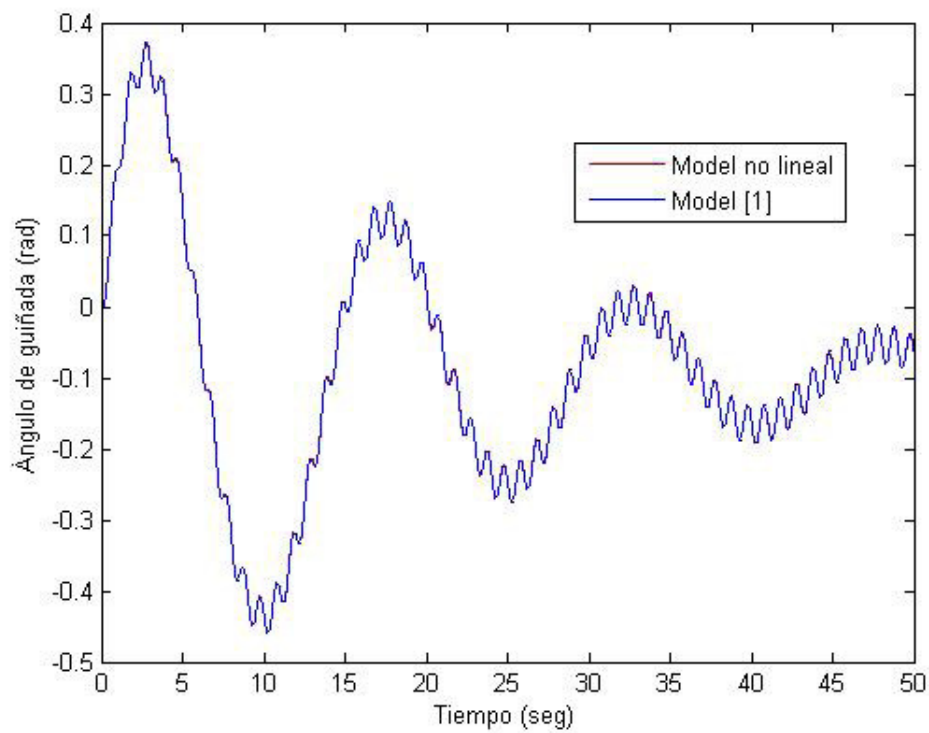


Figura 1.13: Ángulo de guiñada (entrada 2)

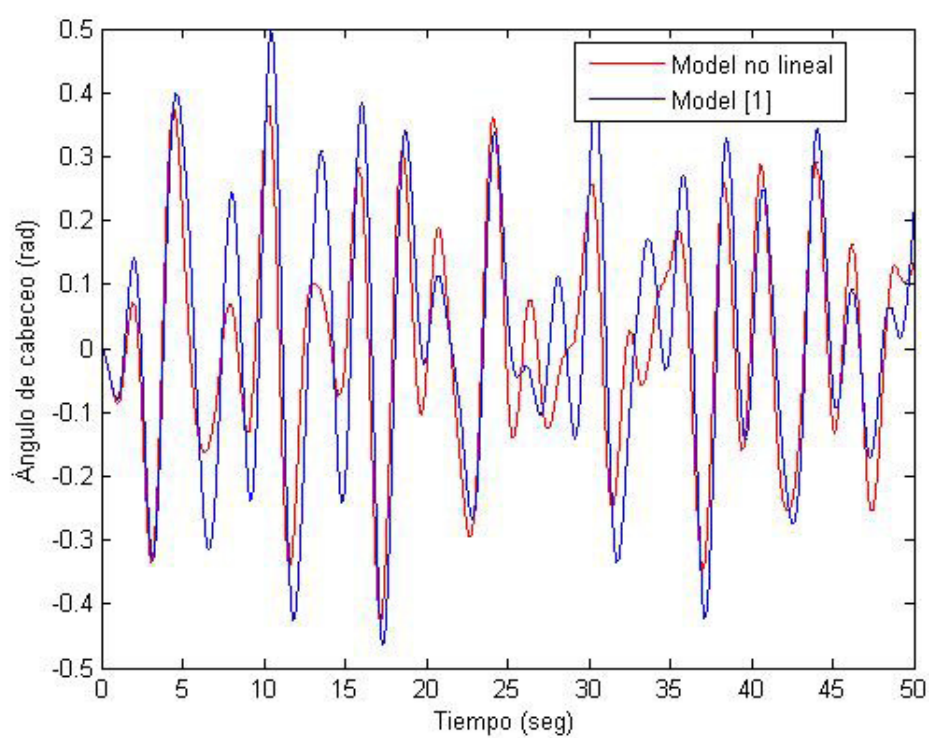


Figura 1.14: Ángulo de cabeceo (entrada 3)

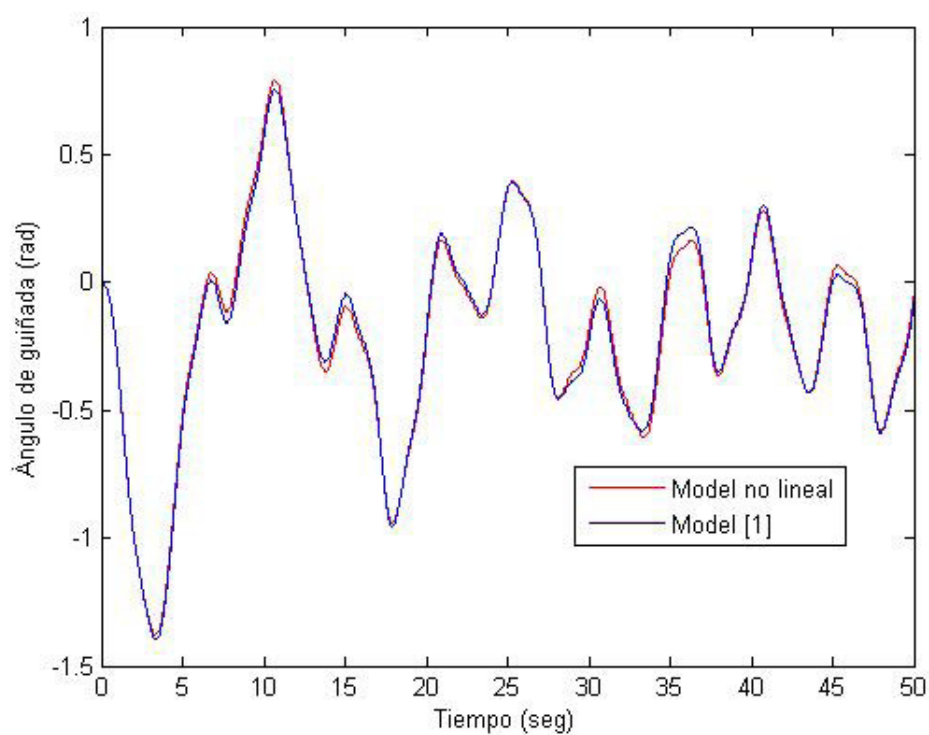


Figura 1.15: Ángulo de guiñada (entrada 3)

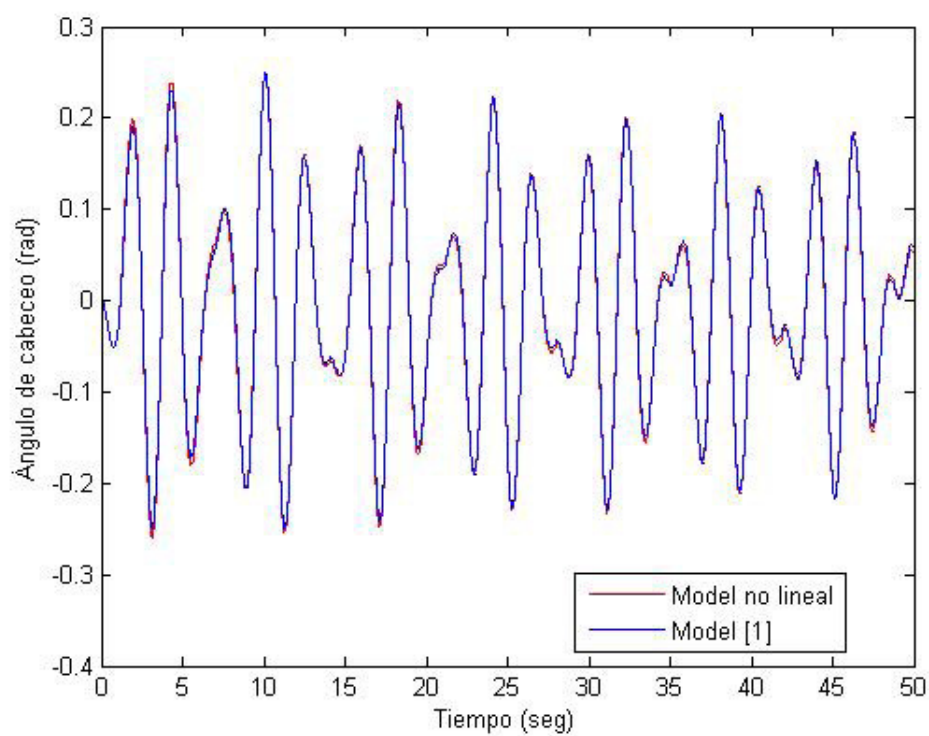


Figura 1.16: Ángulo de cabeceo (entrada 4)

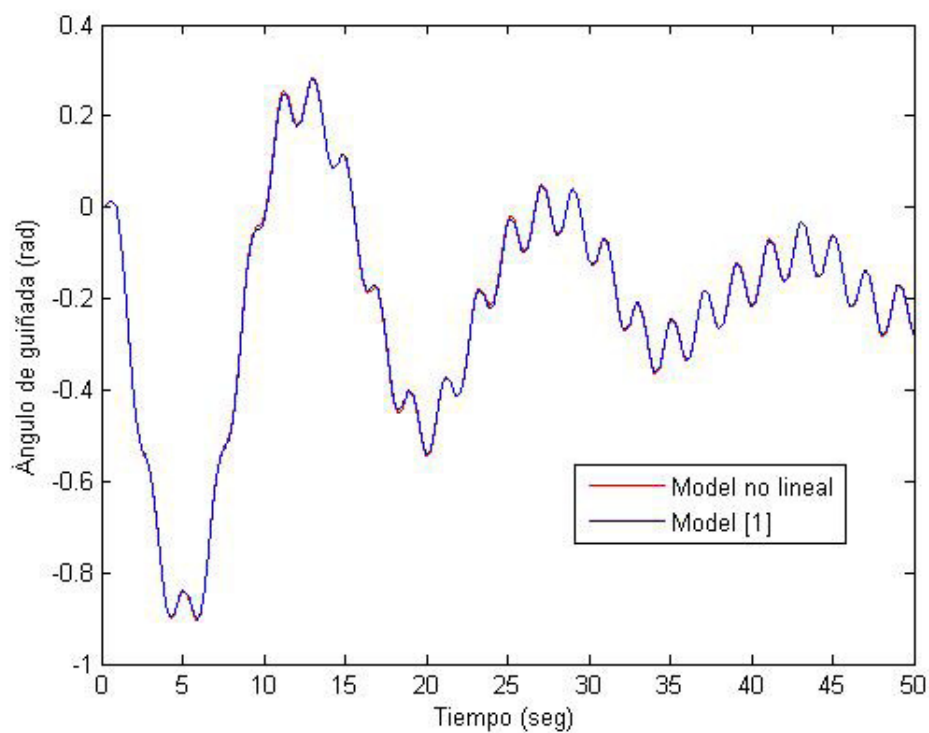


Figura 1.17: Ángulo de guiñada (entrada 4)

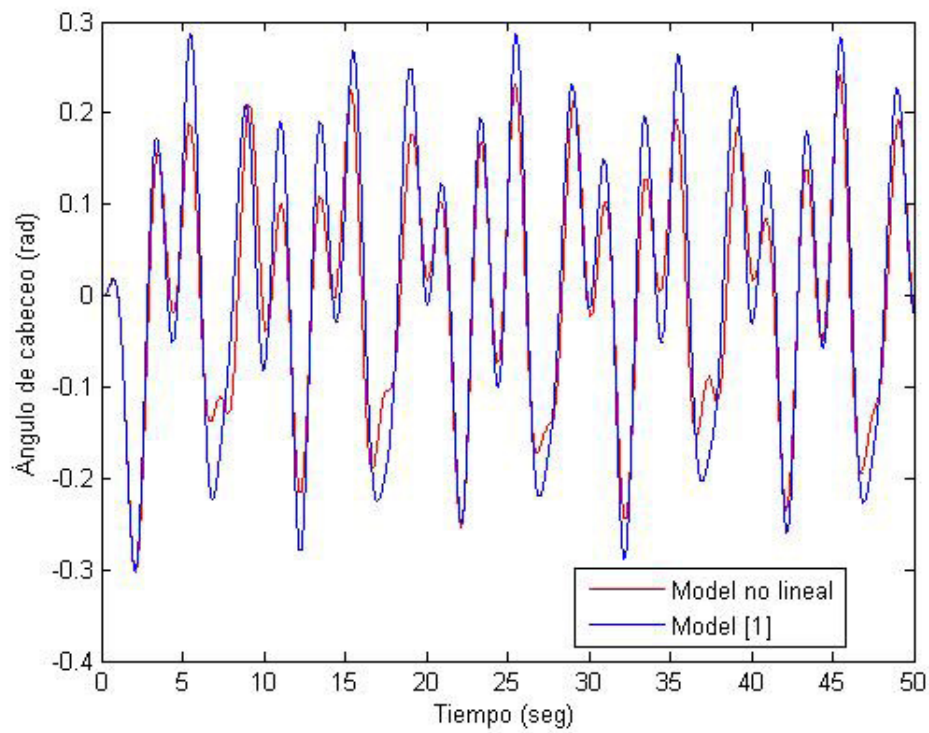


Figura 1.18: Ángulo de cabeceo (entrada 5)

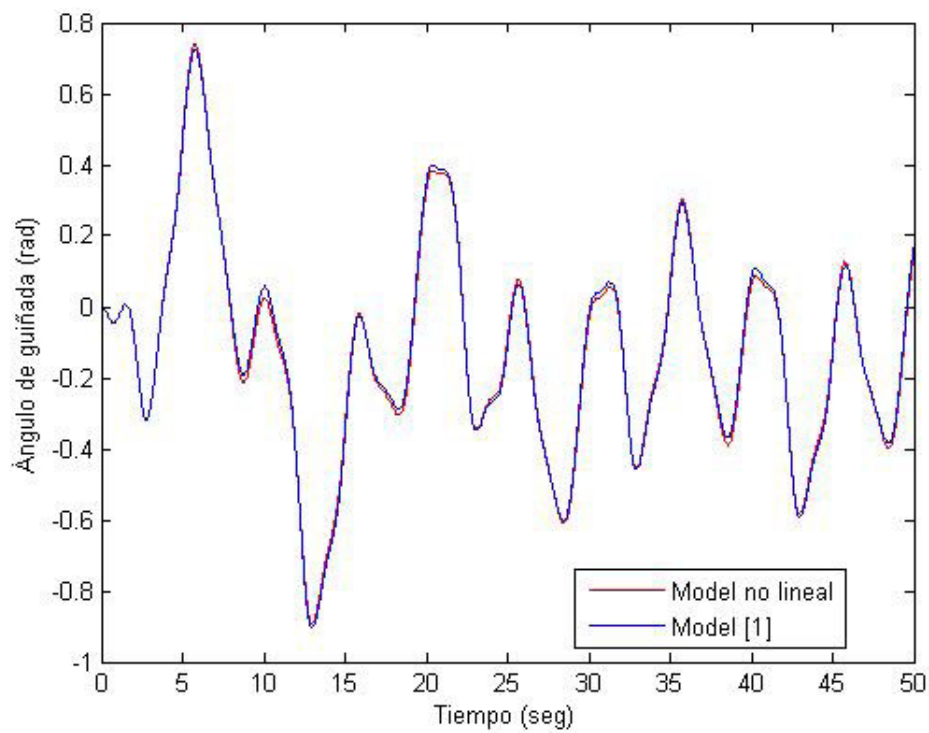


Figura 1.19: Ángulo de guiñada (entrada 5)

## CAPÍTULO 2. MODELOS *LINEAR* *PARAMETER VARYING*, LPV. TEORÍA Y APLICACIÓN

En este capítulo se van a exponer las bases teóricas de los modelos *Linear Parameter Varying*, LPV. Se explicarán las distintas técnicas existentes para la obtención de dichos modelos; aproximación Jacobiana, transformación de estados y función de sustitución. Por último se obtendrá un modelo LPV del TRMS.

### 2.1. Sistemas LPV y Quasi-LPV

En esta sección vamos a describir las principales características de los sistemas LPV y quasi-LPV. Formalmente podemos definir un sistema LPV como sigue. Dado un subconjunto compacto  $\mathcal{P} \subset \mathcal{R}^s$ , la variación del conjunto de parámetros establecidos  $\mathcal{F}_p$  denota el conjunto de todas las funciones continuas a trazos de *mapping*  $\mathcal{R}^+$  (tiempo) en  $\mathcal{P}$  con un número finito de discontinuidades en cualquier intervalo. Teniendo en cuenta las funciones continuas:

$$A : \mathcal{R}^s \rightarrow \mathcal{R}^{n \times n}, B : \mathcal{R}^s \rightarrow \mathcal{R}^{n \times n_u}, C : \mathcal{R}^s \rightarrow \mathcal{R}^{n_y \times n} \text{ y } D : \mathcal{R}^s \rightarrow \mathcal{R}^{n_y \times n_u}$$

Un sistema lineal de parámetros variables de orden  $n$  se define como:

$$\dot{x}(t) = A(\rho(t))x(t) + B(\rho(t))u(t) \quad (2.1)$$

$$y(t) = C(\rho(t))x(t) + D(\rho(t))u(t) \quad (2.2)$$

Una característica de los sistemas LPV es que el vector de estado,  $x(t)$ , y el de control,  $u(t)$  han de ser lineales, mientras que las matrices  $A, B, C$  y  $D$  normalmente son funciones no lineales del vector de *scheduling*.

Los sistemas quasi-LPV son una variante de los sistemas LPV donde alguna de las variables de *scheduling*,  $\rho(t)$ , es también una variable de estado del sistema. Entonces podemos dividir el vector de estado del sistema no lineal en estados *scheduling*,  $z(t)$ , y estados *non-scheduling*,  $w(t)$ , por lo tanto el vector de estado será  $x(t) = [z(t) \ w(t)]^T$ .

Para el caso de sistemas quasi-LPV podemos reescribir las ecuaciones 2.1 y 2.2 como:

$$\dot{z}(t) = A_{11}(\rho(t))z(t) + A_{12}(\rho(t))w(t) + B_1(\rho(t))u(t) \quad (2.3)$$

$$\dot{w}(t) = A_{21}(\rho(t))z(t) + A_{22}(\rho(t))w(t) + B_2(\rho(t))u(t) \quad (2.4)$$

$$y(t) = C_1(\rho(t))z(t) + C_2(\rho(t))w(t) + D(\rho(t))u(t) \quad (2.5)$$

De acuerdo a las definiciones de los modelos LPV y quasi-LPV podemos observar que el TRMS se corresponde con un modelo quasi-LPV, dado que las variables de *scheduling* también son variables de estado.

## 2.2. Obtención de un sistema LPV

En esta sección vamos a explicar tres técnicas para la obtención de un modelo LPV a partir del sistema no lineal. Estas técnicas son la aproximación Jacobiana, la transformación de estado y la función de sustitución:

- La aproximación Jacobiana consiste en la linealización de las ecuaciones no lineales del sistema entorno a puntos de equilibrio de interés de la envolvente de funcionamiento del sistema. La descripción completa del sistema se obtendrá por interpolación entre los distintos puntos de equilibrio seleccionados (sección 2.2.1.).
- La transformación de estado consiste en la obtención de un modelo quasi-LPV del sistema no lineal, donde los estados *non-scheduling* se seleccionan de manera que incluyan todos los términos no lineales de las ecuaciones. El modelo LPV obtenido por esta técnica también se evalúa bajo ciertos puntos de equilibrio (sección 2.2.2.).
- La función de sustitución obtiene un modelo LPV en torno a un único punto de equilibrio mediante la descomposición de funciones no lineales. La descomposición se realiza como si se tratara de un problema de optimización. Las ecuaciones lineales resultantes son sustituidas por los términos no lineales del sistema inicial (sección 2.2.3.).

### 2.2.1. Aproximación Jacobiana

La aproximación Jacobia es la metodología más utilizada para linealizar sistemas. Podemos utilizarla para crear un modelo LPV o una familia de modelos LPV respecto a un conjunto de puntos de equilibrio que representa la envolvente de funcionamiento de interés. Esta metodología tiene los inconvenientes debidos a la aproximación de primer orden para obtener el sistema lineal y las interpolaciones entre los distintos puntos de equilibrio. La aproximación de primer orden es solo aceptable dentro de pequeñas variaciones del punto de equilibrio. Esto puede dar lugar a un comportamiento divergente respecto al modelo no lineal, para entradas de control grandes. Para evitar este comportamiento se realiza la aproximación alrededor de un conjunto adecuado de puntos de equilibrio.

Mediante esta técnica es prácticamente imposible capturar el comportamiento transitorio de la planta no lineal. Existen estudios mediante los cuales se puede tener en

cuenta las características esenciales de la repuesta transitoria para un tipo particular de sistemas no lineales.

La aproximación Jacobiana consiste en linealizar las ecuaciones no lineales del sistema mediante una expansión de Taylor de primer orden en torno a distintos puntos de equilibrio. Supongamos un sistema no lineal de la siguiente forma:

$$\dot{z}(t) = f_1(z(t), w(t), u(t), p(t)) = A_{11}(\rho(t))z(t) + A_{12}(\rho(t))w(t) + B_1(\rho(t))u(t) + E_1(\rho(t))p(t) \quad (2.6)$$

$$\dot{w}(t) = f_2(z(t), w(t), u(t), p(t)) = A_{21}(\rho(t))z(t) + A_{22}(\rho(t))w(t) + B_2(\rho(t))u(t) + E_2(\rho(t))p(t) \quad (2.7)$$

El vector de estado se define por  $x(t) = [z(t)w(t)]^T$ , las entradas de control por  $u(t)$ , y el vector de *scheduling* por  $\rho(t) = [z(t)p(t)]^T \in F_p$ , donde  $p(t)$  es un vector formado por parámetros de *scheduling* exógenos.

Como hemos dicho anteriormente el objetivo es linealizar el sistema respecto al punto de equilibrio  $\rho_{eq} = (z_{eq}, p_{eq})$ . Aplicando la teoría de pequeñas variaciones y utilizando una aproximación de primer orden tenemos que

$$x = x_{eq} + \delta_x \quad (2.8)$$

$$\dot{x} \approx \dot{x}_{eq} + \dot{\delta}_x \quad (2.9)$$

Aplicando expansión de Taylor,

$$\begin{aligned} \dot{z} = f_1(z_{eq}, w_{eq}, u_{eq}, p_{eq}) &+ \left[ \frac{\partial A_{11}}{\partial z} z + A_{11} + \frac{\partial A_{21}}{\partial z} w + \frac{\partial B_1}{\partial z} u + \frac{\partial E_1}{\partial z} p \right]_{eq} \delta_z + \\ &[A_{12}]_{eq} \delta_w + [B_1]_{eq} \delta_u + \left[ \frac{\partial A_{11}}{\partial p} z + A_{11} + \frac{\partial A_{21}}{\partial p} w + \frac{\partial B_1}{\partial p} u + \frac{\partial E_1}{\partial p} p + E_1 \right]_{eq} \delta_p \end{aligned} \quad (2.10)$$

EL primer término en el lado derecho de la igualdad es nulo, ya que por definición la derivada es nula en el equilibrio. Los términos de orden superior son despreciables si el área de interés está lo suficientemente restringida a las zonas cercanas al punto de equilibrio. Aplicando una linealización similar en  $\dot{w}$ , el modelo Jacobiano será

$$\dot{\delta}_z = a_{11eq}\delta_z + a_{12eq}\delta_w + b_{1eq}\delta_u + e_{1eq}\delta_p \quad (2.11)$$

$$\dot{\delta}_w = a_{21eq}\delta_z + a_{22eq}\delta_w + b_{2eq}\delta_u + e_{2eq}\delta_p \quad (2.12)$$

Evaluado en el punto de equilibrio,  $eq = [z_{eq}, p_{eq}]$ , y donde los términos matriciales son:

$$a_{11} = \frac{\partial A_{11}}{\partial z} z + A_{11} + \frac{\partial A_{12}}{\partial z} w + \frac{\partial B_1}{\partial z} u + \frac{\partial E_1}{\partial z} p \quad (2.13)$$

$$a_{12} = A_{12} \quad (2.14)$$

$$a_{21} = \frac{\partial A_{21}}{\partial z} z + A_{21} + \frac{\partial A_{22}}{\partial z} w + \frac{\partial B_2}{\partial z} u + \frac{\partial E_2}{\partial z} p \quad (2.15)$$

$$a_{22} = A_{22} \quad (2.16)$$

$$b_1 = B_1 \quad (2.17)$$

$$b_2 = B_2 \quad (2.18)$$

$$e_1 = \frac{\partial A_{11}}{\partial p} z + \frac{\partial A_{12}}{\partial p} w + \frac{\partial B_1}{\partial p} u + \frac{\partial E_1}{\partial p} p + E_1 \quad (2.19)$$

$$e_2 = \frac{\partial A_{21}}{\partial p} z + \frac{\partial A_{22}}{\partial p} w + \frac{\partial B_2}{\partial p} u + \frac{\partial E_2}{\partial p} p + E_2 \quad (2.20)$$

Finalmente para obtener el modelo quasi-LPV evaluamos el modelo en espacio de estados anterior en distintos puntos de equilibrio de la envolvente de funcionamiento del sistema. Los valores en el equilibrio para los estados de *non-scheduling*,  $w_{eq}$ , y las entradas de control,  $u_{eq}$ , se determinan sustituyendo en las ecuaciones 2.6 y 2.7 el punto de equilibrio deseado e igualando las derivadas a cero. Por lo tanto, estamos parametrizando el modelo en términos de las variables de *scheduling* elegidas,  $\rho = [z \ p]^T$ .

### 2.2.2. Transformación de estado

Esta segunda técnica recibe la denominación de transformación de estado porque el modelo quasi-LPV se obtiene a través de transformaciones exactas de los estados no lineales. Básicamente se realiza una transformación basada en funciones diferenciables de los estados *non-scheduling* y de las entradas de control con el objetivo de eliminar cualquier término no lineal independiente de la variable de *scheduling*. Esta técnica fue desarrollada por Shamma y Cloutier, y se ha utilizado en un gran abanico de aplicaciones, tales como: control de aeronaves de combate como el F-16 y el VAAC Harrier, misiles tierra-aire, etcétera.

Para poder utilizar esta técnica, el sistema no lineal a de ser de la siguiente forma:

$$\dot{z}(t) = k_1(\rho(t)) + A_{11}(\rho(t))z(t) + A_{12}(\rho(t))w(t) + B_1(\rho(t))u(t) \quad (2.21)$$

$$\dot{w}(t) = k_2(\rho(t)) + A_{21}(\rho(t))z(t) + A_{22}(\rho(t))w(t) + B_2(\rho(t))u(t) \quad (2.22)$$



$$y(t) = [z(t)w(t)] \quad (2.23)$$

donde  $z(t) \in \mathcal{R}^{n_z}$  es el vector de estados de *scheduling*,  $w(t) \in \mathcal{R}^{n_w}$  los estados de *non-scheduling*,  $u(t) \in \mathcal{R}^{n_u}$  es el vector de entradas de control, y el vector de salida medible viene dado por  $y \in \mathcal{F}_p$ . Las matrices  $A$ ,  $B$  y  $k$  pueden ser no lineales en función del vector de *scheduling*,  $\rho(t)$ .

Además será necesario que  $n_z = n_u$ , de lo contrario el sistema será no detectable. Este hecho se ha de tener en cuenta más adelante para la correcta sintetización del controlador LPV. Si el sistema cumple todas las características enunciadas, éste puede ser transformado en un modelo quasi-LPV en espacio de estados en función de las variables de *scheduling*,  $\rho(t)$ . Esto implica que las variables de *scheduling* han de ser medibles en tiempo real.

Supongamos que existen las funciones diferenciables  $w_{eq}(\rho(t))$  y  $u_{eq}(\rho(t))$  tal que para cada  $\rho(t)$  el sistema está en estado estacionario

$$0 = k_1(\rho(t)) + A_{11}(\rho(t))z(t) + A_{12}(\rho(t))w_{eq}(\rho(t)) + B_1(\rho(t))u_{eq}(\rho(t)) \quad (2.24)$$

$$0 = k_2(\rho(t)) + A_{21}(\rho(t))z(t) + A_{22}(\rho(t))w_{eq}(\rho(t)) + B_2(\rho(t))u_{eq}(\rho(t)) \quad (2.25)$$

Uno de los inconvenientes más importantes de este método es que no existe la seguridad de que tengamos puntos de equilibrio en el rango de funcionamiento de interés para una combinación particular de variables de *scheduling*. Solo se puede asegurar que el modelo obtenido es válido en el rango de funcionamiento restringido, el que tiene un número aceptable de puntos de equilibrio. En consecuencia antes de generar el modelo quasi-LPV es necesario hacer un estudio de los puntos de equilibrio.

Las funciones de equilibrio definidas anteriormente, 2.24, pueden utilizarse para transformar las ecuaciones 2.21 y 2.22. Trás cierta manipulación algebraica obtenemos el siguiente modelo quasi-LPV:

$$\dot{z} = A_{12}(\rho)(w - w_{eq}(\rho)) + B_1(\rho)(u - u_{eq}(\rho)) \quad (2.26)$$

$$\begin{aligned} \dot{w} - \dot{w}_{eq} = & \left( A_{22}(\rho) - \frac{\partial w_{eq}}{\partial z} \bigg|_{\rho} A_{12}(\rho) \right) (w - w_{eq}(\rho)) + \\ & + \left( B_2(\rho) - \frac{\partial w_{eq}}{\partial z} \bigg|_{\rho} B_1(\rho) \right) (u - u_{eq}(\rho)) \end{aligned} \quad (2.27)$$

Las ecuaciones 2.26 y 2.27 representan el modelo quasi-LPV obtenido mediante la transformación de estado. Podemos observar que los términos no lineales de la matriz  $k(\rho)$  han desaparecido, además el modelo obtenido representa el sistema no lineal generado a través de una transformación exacta. Este hecho es una de las principales ventajas de esta técnica, el modelo LPV obtenido es una representación exacta del modelo no lineal.

### 2.2.3. Función de sustitución

La última de las técnicas propuestas fue planteada por primera vez por *Tan, W* en [7], para sistemas quasi-LPV con no linealidades en la entrada de control; hay que recordar que los sistemas quasi-LPV deben ser lineales respecto a los estados de *non-scheduling* y las entradas de control. En el trabajo de *Tan, W* se propone una transformación de la entrada no lineal para obtener una lineal. El sistema se convierte en un modelo LPV donde la entrada real se calcula a través de la inversa de la entrada no lineal prevista.

Supongamos un sistema no lineal con una entrada de control no lineal

$$\dot{z}(t) = k_1(\rho(t)) + A_{11}(\rho(t))z(t) + A_{12}(\rho(t))w(t) + B_1(\rho(t))\tilde{u}(\rho, \delta) \quad (2.28)$$

$$\dot{w}(t) = k_2(\rho(t)) + A_{21}(\rho(t))z(t) + A_{22}(\rho(t))w(t) + B_2(\rho(t))\tilde{u}(\rho, \delta) \quad (2.29)$$

donde  $z \in \mathcal{R}^{n_z}$  es el vector de estado de *scheduling*,  $w \in \mathcal{R}^{n_w}$  los estados de *non-scheduling*,  $\tilde{u}: \mathcal{R}^{n_z \times n_p \times n_\delta} \rightarrow \mathcal{R}^{n_\delta}$  es el vector de entrada de control invertible respecto a  $\delta$ , la entrada no lineal. Las matrices  $A$  y  $B$  son funciones sin singularidades. El vector de variables de *scheduling* es  $\rho = [z \ p]^T \in \mathcal{F}_p$ .

Es posible encontrar una función  $\tilde{v}: \mathcal{R}^{n_z \times n_p \times n_\delta} \rightarrow \mathcal{R}^{n_\delta}$  tal que para todo  $\rho \in \mathcal{F}_p$ , y  $u \in \mathcal{R}^{n_\delta}$

$$\tilde{u}(z, p, \tilde{v}(z, p, \delta)) = u \quad (2.30)$$

El término  $\tilde{u}(z, p, \delta)$  linealiza las ecuaciones 2.28 y 2.29. Por lo tanto, es posible tratar  $u$  como la entrada del sistema no lineal y reescribir las ecuaciones 2.28 y 2.29 como

$$\dot{z}(t) = k_1(\rho(t)) + A_{11}(\rho(t))z(t) + A_{12}(\rho(t))w(t) + B_1(\rho(t))u \quad (2.31)$$

$$\dot{w}(t) = k_2(\rho(t)) + A_{21}(\rho(t))z(t) + A_{22}(\rho(t))w(t) + B_2(\rho(t))u \quad (2.32)$$

El sistema no lineal descrito por las ecuaciones 2.31 y 2.32, ya está listo para ser modelado como LPV. Es importante reflejar que la entrada actual,  $\delta$ , se calcula a través de la inversa de  $\tilde{u}$ ,

$$\delta(t) := \tilde{v}(z(t), p(t), u(t)) \quad (2.33)$$

Para simplificar el problema vamos a suponer que no hay variables exógenas de *scheduling*,  $p = z \in \mathcal{R}^{n_z}$ , lo que significa que el modelo será quasi-LPV. Definimos las siguientes funciones

$$\begin{aligned} \eta_z &= z - z_{trim} \\ \eta_w &= w - w_{trim} \\ \eta_u &= u - u_{trim} \end{aligned} \quad (2.34)$$

donde  $z_{trim}$  es una condición de equilibrio elegida y  $w_{trim}$ , y  $u_{trim}$  los valores en el equilibrio correspondientes para los estados de *non-scheduling* y las entradas de control.

Sustituyendo las ecuaciones 2.34 en las ecuaciones 2.31 y 2.32 y re ordenando términos

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_z - \dot{z}_{trim} &= A_{11}(\eta_z + z_{trim})\eta_z + A_{12}(\eta_z + z_{trim})\eta_w + B_1(\eta_z + z_{trim})\eta_u + \\ &+ \mathcal{F}(\eta_z, w_{trim}, u_{trim}) \end{aligned} \quad (2.35)$$

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_w - \dot{w}_{trim} &= A_{21}(\eta_z + z_{trim})\eta_z + A_{22}(\eta_z + z_{trim})\eta_w + B_2(\eta_z + z_{trim})\eta_u + \\ &+ \mathcal{F}(\eta_z, w_{trim}, u_{trim}) \end{aligned} \quad (2.36)$$

donde  $\mathcal{F}(\eta_z, w_{trim}, u_{trim})$  será respectivamente

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\eta_z, w_{trim}, u_{trim}) &= A_{11}(\eta_z + z_{trim})z_{trim} + A_{12}(\eta_z + z_{trim})w_{trim} + \\ &+ B_1(\eta_z + z_{trim})u_{trim} + k_1(\eta_z + z_{trim}) \end{aligned} \quad (2.37)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\eta_z, w_{trim}, u_{trim}) &= A_{21}(\eta_z + z_{trim})z_{trim} + A_{22}(\eta_z + z_{trim})w_{trim} + \\ &+ B_2(\eta_z + z_{trim})u_{trim} + k_2(\eta_z + z_{trim}) \end{aligned} \quad (2.38)$$

El objetivo es descomponer  $\mathcal{F}(\eta_z, w_{trim}, u_{trim})$  en funciones lineales en  $\eta_z \in \mathcal{R}^{n_z}$  y sustituir el resultado en las ecuaciones 2.35 y 2.36. Definimos la función de descomposición como

$$\mathcal{F}(\eta_z, w_{trim}, u_{trim}) = f_1(z)\eta_{z1} + f_2(z)\eta_{z2} + \dots + f_n(z)\eta_{zn} \quad (2.39)$$

donde las funciones  $f_1(z), f_2(z), \dots, f_n(z)$  son las incógnitas a determinar. El cálculo de éstas se puede tratar como un problema de optimización.

Una vez obtenidas las funciones de descomposición incógnitas podemos reescribir las ecuaciones 2.35 y 2.36 como

$$\dot{z} = (A_{11}(z) + f_1(z))(z - z_{trim}) + A_{12}(z)(w - w_{trim}) + B_1(z)(u - u_{trim}) \quad (2.40)$$

$$\dot{w} = (A_{21}(z) + f_2(z))(z - z_{trim}) + A_{22}(z)(w - w_{trim}) + B_2(z)(u - u_{trim}) \quad (2.41)$$

obteniendo así el modelo quasi-LPV por la técnica de la función de sustitución.

#### 2.2.4. Comparación entre las distintas técnicas de modelado LPV

En las secciones 2.2.1., 2.2.2. y 2.2.3. se han explicado las bases teóricas de las distintas técnicas de obtención de un modelo LPV. A continuación haremos un análisis de las principales ventajas y desventajas de cada una de las técnicas y seleccionaremos una de ellas para la obtención del modelo LPV del TRMS.

Mediante la aproximación Jacobiana obtenemos un modelo LPV que resulta una aproximación de primer orden del modelo no lineal estudiado. Por contra, esta técnica es la más extendida, y es de la que se tiene un conocimiento teórico y práctico más profundo. De la aplicación de la transformación de estado obtenemos un modelo LPV exacto, el cual teóricamente será igual que el modelo no lineal de referencia. No obstante en el uso de ésta, se presupone que existen funciones de equilibrio para los estados de *non-scheduling*,  $w$ , y para las entradas de control,  $u$ . Desafortunadamente, esto no se puede garantizar en todos los casos. Ambas técnicas, la aproximación Jacobiana y la transformación de estado se han de evaluar en distintos puntos de equilibrio de la envolvente de funcionamiento. La descripción total en espacio de estados del sistema se obtendrá mediante interpolación de los distintos puntos de equilibrio seleccionados.

La última de las técnicas estudiadas, la función de descomposición, presenta la ventaja que el modelo LPV obtenido es alrededor de un único punto de equilibrio, hecho que nos reduce el error de aproximación ya que no será necesaria la interpolación entre distintos puntos de equilibrio. Por contra esta técnica es la que presenta un bagaje teórico menos extenso y aun presenta muchas incógnitas en su correcta aplicación sobre todo en como afecta la selección del punto de equilibrio alrededor del cual se realiza el modelo LPV en la síntesis del controlador.

Vistas las principales ventajas e inconvenientes de cada una de las distintas técnicas se ha decidido emplear la aproximación Jacobiana al ser ésta la que consta con más ejemplos prácticos desarrollados con éxito.

## 2.3. Modelo LPV del TRMS

En esta sección se van a detallar los pasos seguidos para la obtención del modelo LPV del TRMS. El primer punto a tratar es la envolvente de funcionamiento del TRMS. Como ya se dijo en 1.1. las entradas de control del TRMS son los voltajes aplicados a los motores de los rotores, dichos voltajes están limitados por el fabricante del sistema entre los 0-2 Voltios, así pues ésta será nuestra envolvente de funcionamiento.

Una vez caracterizada la envolvente de funcionamiento se han de calcular los puntos de equilibrio. Antes de calcular los puntos de equilibrio se ha de decidir donde queremos calcularlos. Como ya hemos explicado anteriormente vamos a obtener el modelo LPV a partir de la aproximación Jacobiana. Esto implica que hemos de realizar una batería de submodelos LPV en distintos puntos de la envolvente de funcionamiento e ir interpolando para obtener la descripción total del sistema, la decisión de cuantos submodelos se van a emplear es una decisión de compromiso entre la exactitud que deseamos tener y el cálculo que queremos realizar. Una apreciación evidente es que cuantos más submodelos utilicemos mayor precisión obtendremos pero necesitaremos más capacidad de cálculo, se podría hacer un símil con las técnicas de elementos finitos. Así pues se ha decidido utilizar una batería de 16 modelos repartidos a incrementos de 0.5 voltios en las entradas de control, de manera que los modelos estarán calculados en torno a las entradas de la tabla 2.1.

<b>Modelo</b>	<b>Voltaje rotor principal</b>	<b>Voltaje rotor cola</b>
<b>Modelo 1</b>	0	0
<b>Modelo 2</b>	0.5	0
<b>Modelo 3</b>	1	0
<b>Modelo 4</b>	1.5	0
<b>Modelo 5</b>	0	0.5
<b>Modelo 6</b>	0.5	0.5
<b>Modelo 7</b>	1	0.5
<b>Modelo 8</b>	1.5	0.5
<b>Modelo 9</b>	0	1
<b>Modelo 10</b>	0.5	1
<b>Modelo 11</b>	1	1
<b>Modelo 12</b>	1.5	1
<b>Modelo 13</b>	0	1.5
<b>Modelo 14</b>	0.5	1.5
<b>Modelo 15</b>	1	1.5
<b>Modelo 16</b>	1.5	1.5

Tabla 2.1: Puntos de operación batería submodelos

El punto de partida para poder calcular los valores en el equilibrio y los modelos LPV son las ecuaciones del movimiento calculadas en el capítulo 1. En 1.2. hemos obtenido las ecuaciones 1.18, 1.19, 1.20, 1.21, 1.22, 1.23, 1.24 y 1.25 las cuales determinan el comportamiento no lineal del TRMS mediante ocho variables de es-

tado. En la sección 2.2.1. se ha descrito el procedimiento a seguir para obtener el modelo LPV. Para ello hemos de hacer la linealización de primer orden respecto a las variables estado, mediante el desarrollo en serie de Taylor de cada una de las ecuaciones del modelo no lineal. A continuación se muestra el proceso de cálculo de la serie para una de las ecuaciones que forman el modelo no lineal, se ha escogido la ecuación que describe el movimiento en el plano vertical. Por brevedad, representaremos dicha ecuación como:

$$\frac{dH_v}{dt} = f_4(\omega_m, \theta, \omega_t, \psi) \quad (2.42)$$

Entonces realizando la serie de Taylor tenemos,

$$f_4 = \frac{df_4}{d\omega_m} \nabla_{\omega_m} + \frac{df_4}{d\theta} \nabla_{\theta} + \frac{df_4}{d\omega_t} \nabla_{\omega_t} + \frac{df_4}{d\psi} \nabla_{\psi} \quad (2.43)$$

Repetiendo este proceso para cada una de las ecuaciones del modelo no lineal obtenemos el modelo LPV. La expresión genérica del modelo LPV será:

$$\begin{bmatrix} \frac{d(\Delta i_m)}{dt} \\ \frac{d(\Delta \omega_m)}{dt} \\ \frac{d(\Delta H_v)}{dt} \\ \frac{d(\Delta \theta)}{dt} \\ \frac{d(\Delta i_t)}{dt} \\ \frac{d(\Delta \omega_t)}{dt} \\ \frac{d(\Delta H_h)}{dt} \\ \frac{d(\Delta \psi)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial i_m} & \frac{\partial f_1}{\partial \omega_m} & \frac{\partial f_1}{\partial H_v} & \frac{\partial f_1}{\partial \theta} & \frac{\partial f_1}{\partial i_t} & \frac{\partial f_1}{\partial \omega_t} & \frac{\partial f_1}{\partial H_h} & \frac{\partial f_1}{\partial \psi} \\ \frac{\partial f_2}{\partial i_m} & \frac{\partial f_2}{\partial \omega_m} & \frac{\partial f_2}{\partial H_v} & \frac{\partial f_2}{\partial \theta} & \frac{\partial f_2}{\partial i_t} & \frac{\partial f_2}{\partial \omega_t} & \frac{\partial f_2}{\partial H_h} & \frac{\partial f_2}{\partial \psi} \\ \frac{\partial f_3}{\partial i_m} & \frac{\partial f_3}{\partial \omega_m} & \frac{\partial f_3}{\partial H_v} & \frac{\partial f_3}{\partial \theta} & \frac{\partial f_3}{\partial i_t} & \frac{\partial f_3}{\partial \omega_t} & \frac{\partial f_3}{\partial H_h} & \frac{\partial f_3}{\partial \psi} \\ \frac{\partial f_4}{\partial i_m} & \frac{\partial f_4}{\partial \omega_m} & \frac{\partial f_4}{\partial H_v} & \frac{\partial f_4}{\partial \theta} & \frac{\partial f_4}{\partial i_t} & \frac{\partial f_4}{\partial \omega_t} & \frac{\partial f_4}{\partial H_h} & \frac{\partial f_4}{\partial \psi} \\ \frac{\partial f_5}{\partial i_m} & \frac{\partial f_5}{\partial \omega_m} & \frac{\partial f_5}{\partial H_v} & \frac{\partial f_5}{\partial \theta} & \frac{\partial f_5}{\partial i_t} & \frac{\partial f_5}{\partial \omega_t} & \frac{\partial f_5}{\partial H_h} & \frac{\partial f_5}{\partial \psi} \\ \frac{\partial f_6}{\partial i_m} & \frac{\partial f_6}{\partial \omega_m} & \frac{\partial f_6}{\partial H_v} & \frac{\partial f_6}{\partial \theta} & \frac{\partial f_6}{\partial i_t} & \frac{\partial f_6}{\partial \omega_t} & \frac{\partial f_6}{\partial H_h} & \frac{\partial f_6}{\partial \psi} \\ \frac{\partial f_7}{\partial i_m} & \frac{\partial f_7}{\partial \omega_m} & \frac{\partial f_7}{\partial H_v} & \frac{\partial f_7}{\partial \theta} & \frac{\partial f_7}{\partial i_t} & \frac{\partial f_7}{\partial \omega_t} & \frac{\partial f_7}{\partial H_h} & \frac{\partial f_7}{\partial \psi} \\ \frac{\partial f_8}{\partial i_m} & \frac{\partial f_8}{\partial \omega_m} & \frac{\partial f_8}{\partial H_v} & \frac{\partial f_8}{\partial \theta} & \frac{\partial f_8}{\partial i_t} & \frac{\partial f_8}{\partial \omega_t} & \frac{\partial f_8}{\partial H_h} & \frac{\partial f_8}{\partial \psi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta i_m \\ \Delta \omega_m \\ \Delta H_v \\ \Delta \theta \\ \Delta i_t \\ \Delta \omega_t \\ \Delta H_h \\ \Delta \psi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial U_m} & \frac{\partial f_1}{\partial U_t} \\ \frac{\partial f_2}{\partial U_m} & \frac{\partial f_2}{\partial U_t} \\ \frac{\partial f_3}{\partial U_m} & \frac{\partial f_3}{\partial U_t} \\ \frac{\partial f_4}{\partial U_m} & \frac{\partial f_4}{\partial U_t} \\ \frac{\partial f_5}{\partial U_m} & \frac{\partial f_5}{\partial U_t} \\ \frac{\partial f_6}{\partial U_m} & \frac{\partial f_6}{\partial U_t} \\ \frac{\partial f_7}{\partial U_m} & \frac{\partial f_7}{\partial U_t} \\ \frac{\partial f_8}{\partial U_m} & \frac{\partial f_8}{\partial U_t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta U_m \\ \Delta U_t \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

Una vez hemos realizado la serie de Taylor para todas la ecuaciones del modelo no lineal, ya estamos en disposición de calcular los puntos de equilibrio de cada sub-modelo. Para ello basta con igualar a cero cada una de las expresiones obtenidas con las series de Taylor y solucionar el sistema.

Este proceso se ha realizado con la ayuda del programa matemático *Matlab*. Como ya hemos dicho en el capítulo 1 hemos implementado el modelo no lineal en *Simulink*, dicho programa dispone de la herramienta de cálculo *linear analysis* la cual nos permite obtener los puntos de equilibrio a partir del modelo no lineal.

Llegados a este punto es cuando hemos de plantearnos la implicación existente al trabajar con la planta real del sistema y no con un sistema simulado. Durante todo el proceso no hemos tenido en cuenta que queremos trabajar sobre la planta real, esto implica que no todas las variables de estado van a estar disponibles en

todo momento, ya que no tenemos sensores que nos den valores de cada una de nuestras variables de estado. Tal y como hemos descrito en la sección 1.1. el TRMS únicamente dispone de sensores que miden la posición en el espacio mediante los ángulos de elevación y acimut además de los tacogeneradores que miden la velocidad angular de los rotores principal y de cola respectivamente. Es por eso que solo podremos trabajar con estas variables y así deberemos especificarlo en la herramienta *linear analysis* de *Matlab*, la cual además de calcular los valores de los puntos de equilibrio también determinará las matrices  $A$ ,  $B$  y  $C$  de cada uno de los submodelos en espacio de estados.

En la figura 2.1 podemos ver la herramienta de cálculo *linear analysis* en la que ya se han calculado los puntos de equilibrio de los 16 submodelos que componen el modelo LPV además de las matrices en espacio de estados de cada uno de ellos.

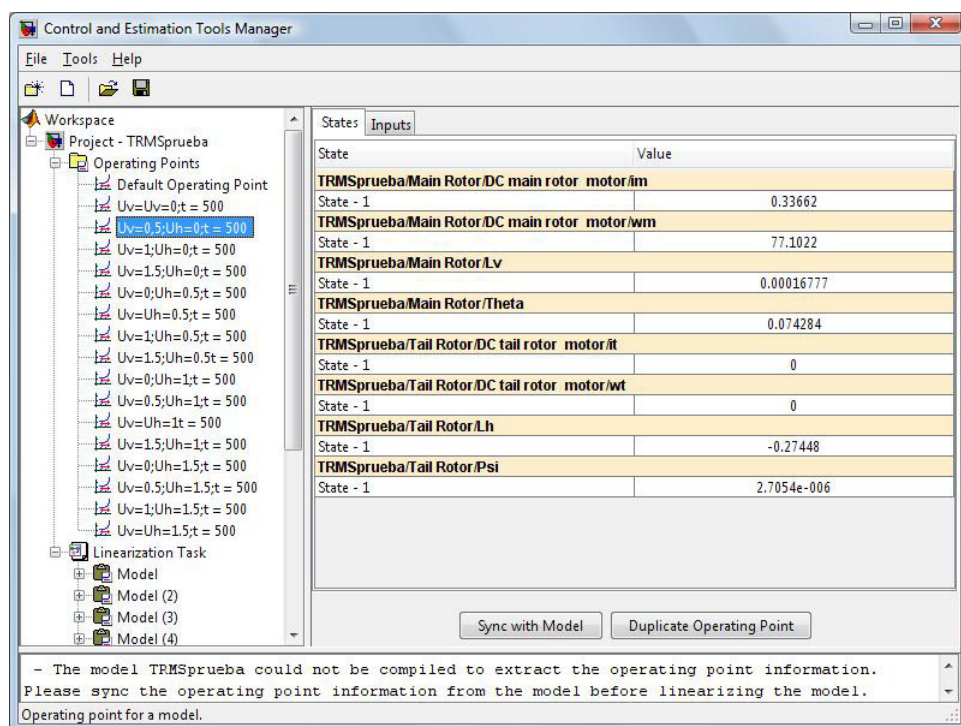


Figura 2.1: Herramienta *Linear Analysis* de *Matlab*

Para llegar a este resultado hay que especificarle al sistema cuales son las entradas y las salidas, en nuestro caso tenemos que las entradas serán los voltajes suministrados a los motores de los rotores,  $U_m$  y  $U_t$ , y las salidas serán  $\omega_m$ ,  $\theta$ ,  $\omega_t$  y  $\psi$ . Una vez especificadas las entradas y las salidas, el siguiente paso es especificar los valores de entrada de cada submodelo, los cuales están en la tabla 2.1, y realizar la simulación del sistema hasta que todas las variables de estado hayan llegado al equilibrio, es decir cuando todas las variables de estado estén en régimen estacionario. En la tabla 2.2 se adjuntan los resultados para todas las variables de estado y cada submodelo, añadir que aparentemente para algunas variables de estado parece que los valores en el equilibrio permanecen constantes esto es debido a que en la tabla 2.2 se han presentado los valores redondeados el objetivo de dicha tabla es orientar al lector del orden de magnitud de los valores en el equilibrio no presentar

los mismo con el cien por cien de exactitud, si este fuera el caso se apreciarían las diferencias entre los unos y los otros.

Modelo	$i_m$	$\omega_m$	$H_v$	$\theta$	$i_t$	$\omega_t$	$H_h$	$\psi$
1	0	0	2.423e-5	-0.015	0	0	0	0
2	0.336	77.1	1.68e-4	0.074	0	0	-0.275	2.71e-6
3	0.739	127.9	4.41e-4	0.234	0	0	-0.437	8.65e-5
4	1.167	168.9	9.95e-4	0.429	0	0	-0.558	1.27e-5
5	0	0	-0.051	-0.015	0.145	103.6	8.34e-7	0.531
6	0.336	77.1	-0.051	0.074	0.145	103.6	-0.275	0.563
7	0.739	127.9	-0.051	0.234	0.145	103.6	-0.437	0.608
8	1.167	168.9	-0.051	0.429	0.145	103.6	-0.558	0.643
9	0	0	-0.097	-0.015	0.318	195.9	6.302e-6	1.898
10	0.336	77.1	-0.097	0.074	0.318	195.9	-0.274	2.011
11	0.739	127.9	-0.097	0.234	0.318	195.9	-0.437	2.173
12	1.167	168.9	-0.097	0.428	0.318	195.9	-0.558	2.295
13	0	0	-0.138	-0.015	0.512	279.7	-1.05e-5	3.872
14	0.336	77.1	-0.138	0.074	0.512	279.7	-0.275	4.104
15	0.739	127.9	-0.138	0.234	0.512	279.7	-0.436	4.433
16	1.167	168.9	-0.138	0.428	0.512	279.7	-0.558	4.683

Tabla 2.2: Valores en el equilibrio para cada submodelo

Una vez obtenidos los valores en el equilibrio para cada submodelo ya estamos en disposición de calcular los modelos linealizados en torno al equilibrio. Se ha decidido realizar una representación discreta en espacio de estados para cada uno de los distintos submodelos.

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ y(k+1) &= Cx(k) \end{aligned} \quad (2.45)$$

Así pues tendremos que calcular las matrices  $A$ ,  $B$  y  $C$  de la representación en espacio de estados de cada submodelo para ello basta con substituir los valores en el equilibrio en las expresiones generales que hemos obtenido mediante la serie de Taylor en 2.44. Este paso como ya hemos dicho anteriormente también lo realiza la herramienta *Linear Analysis*. En el apéndice A se muestran los valores de cada una de las matrices para cada submodelo.

Una vez tenemos determinados cada uno de los submodelos que generarán nuestro modelo LPV el último paso es realizar la interpolación entre cada uno de ellos según convenga. Para ello se ha implementado una función de comparación que otorga un peso a cada uno de los modelos. Dicha función emplea las variables de *scheduling*  $\omega_m$  y  $\omega_t$ , ya que estas tienen una repuesta inmediata a la acción de control, para realizar la comparación entre las salidas que obtenemos del modelo no lineal y los valores que hemos determinado en el equilibrio. Según en el rango que nos



encontramos asignará un peso a cada submodelo otorgando más importancia a los modelos que estén en las proximidades del valor proporcionado por el modelo no lineal. El código completo de la función de comparación está en el apéndice B. En las figuras 2.2 y 2.3 se muestra un fragmento del esquema global del modelo LPV y el detalle de un modelo en concreto en espacio de estados respectivamente en *Simulink*.

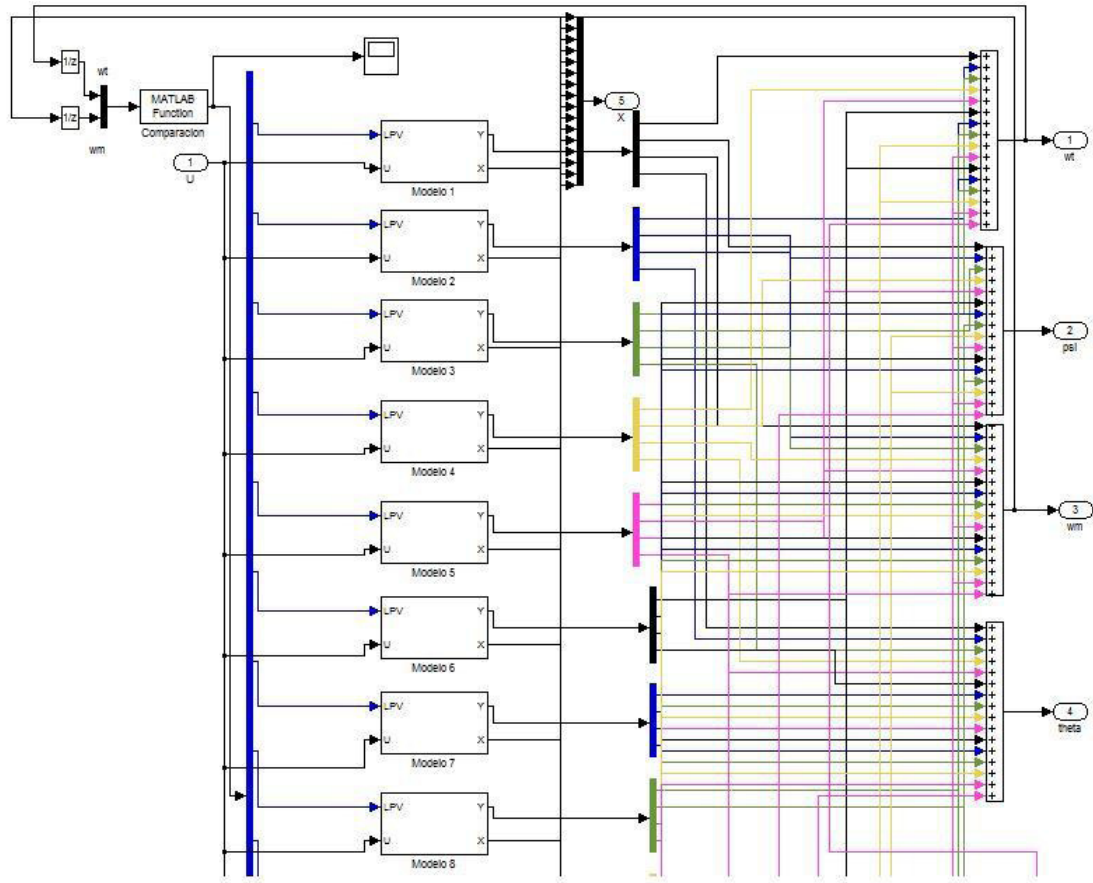


Figura 2.2: Fragmento en *Simulink* del modelo LPV

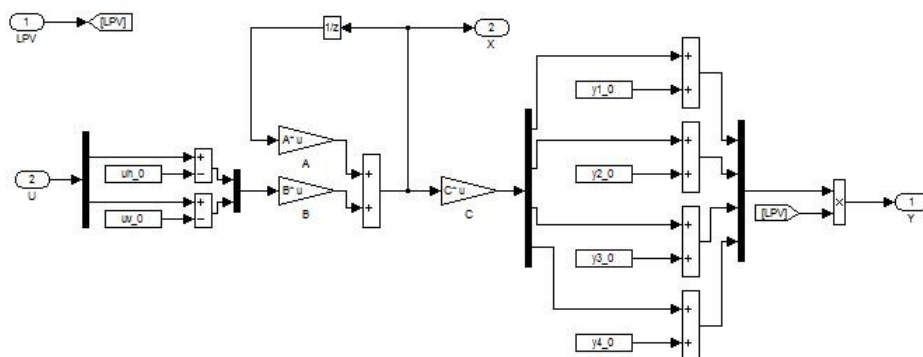


Figura 2.3: *Simulink* del Modelo 1 en espacio de estados

Una vez llegados a este punto podríamos decir que el modelo LPV ya está finalizado, no obstante hay que recordar que ya que no disponemos de sensores que nos determinen el valor de todas las variables de estado será necesario el diseño de un observador de estado para tener el comportamiento completo del TRMS. En el capítulo 3 trataremos el diseño del observador de estado y con ello tendremos el modelo LPV completo del TRMS.

## CAPÍTULO 3. DISEÑO DEL OBSERVADOR DE ESTADO

En este capítulo se expondrá al lector varios conceptos básicos del diseño de sistemas de control en el espacio de estados. En primer lugar se introducirán los conceptos de observabilidad y de observador de estado. Además se realizará una descripción de las desigualdades matriciales lineales, LMI (de sus siglas en inglés), herramienta que se utilizará para realizar el diseño del observador de estado. Por último se le presentará al lector los resultados obtenidos entre el modelo no lineal y el modelo LPV más el observador de estado.

### 3.1. Observabilidad de un sistema

Un aspecto muy importante en los sistemas en espacio de estados es la posibilidad de estimar u observar el valor que toman las variables de estado que no son medibles directamente. Dicha estimación o reconstrucción se realiza a partir de la medida de la salida del sistema durante cierto número mínimo de periodos de muestreo y de los valores de la señal de control que se introducen en el sistema. Se considera que la salida siempre es medible.

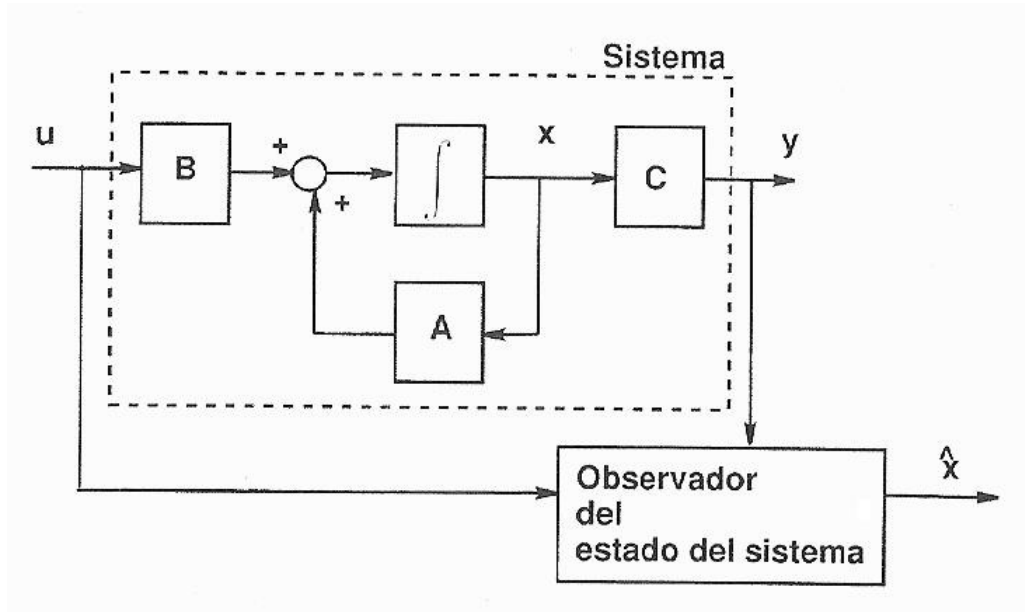


Figura 3.1: Concepto de observador de estado

Si tenemos un sistema definido por las ecuaciones 2.45. Sabemos que la solución de estado para un sistema lineal en tiempo discreto es

$$x(n) = A^n x(0) + \sum_{j=0}^{n-1} A^{n-j-1} B u(j) \quad (3.1)$$

y la salida del sistema tendrá la siguiente expresión

$$y(n) = CA^n x(0) + \sum_{j=0}^{n-1} CA^{n-j-1} Bu(j) \quad (3.2)$$

En la ecuación 3.2 conocemos  $A, B$  y  $C$  y conocemos también la secuencia de entradas que se le ha introducido al sistema  $u(0), \dots, u(n-1)$  por lo que el segundo término de la parte derecha de dicha expresión nos es completamente conocido. Puesto que este término siempre es conocido, podemos simplificar un poco el problema de determinar la observabilidad de un sistema limitándonos a analizar el sistema *no forzado*, es decir con entrada de control cero.

Dicho de otro modo, si podemos determinar para el sistema no forzado cuál era el estado inicial de partida del sistema a partir de la observación de las salidas del sistema, entonces podremos determinarlo también para el sistema sujeto a una secuencia de entradas de control.

### 3.1.1. Observabilidad completa de estado

Un sistema se dice que es completamente observable si todo estado inicial  $x(0)$  puede ser determinado a partir de la observación de la salida  $y(k)$  del sistema en un número finito de intervalos de muestreo.

Considerando el sistema no forzado, las ecuaciones de éste quedan reducidas a

$$\begin{aligned} x(n) &= Ax(n-1) \\ y(n-1) &= Cx(n-1) \end{aligned} \quad (3.3)$$

y aplicando recursivamente la expresión de la ecuación de estado obtenemos que la salida del sistema será

$$y(n-1) = CA^{n-1}x(0) \quad (3.4)$$

De acuerdo con la definición de observabilidad, dada la secuencia de salidas  $y(0), y(1), \dots, y(n-1)$  un sistema será observable si es posible determinar a partir de ellas el estado inicial  $x(0)$ . Si expresamos la salidas en función del estado inicial tenemos

$$\begin{aligned}
y(0) &= Cx(0) \\
y(1) &= CAx(0) \\
&\vdots \\
y(n-1) &= CA^{n-1}x(0)
\end{aligned} \tag{3.5}$$

y en forma matricial

$$\begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ \vdots \\ y(n-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} x(0) \tag{3.6}$$

A la matriz  $[C \ CA \ \dots \ CA^{n-1}]^T$  se le denomina matriz de observabilidad,  $M_o$ . Como  $A$  es una matriz  $n \times n$ , la matriz  $M_o = [C \ CA \ \dots \ CA^{n-1}]^T$  tiene dimensión  $mn \times n$ . Por lo tanto, para que el sistema de ecuaciones tenga solución dicha matriz  $M_o$  tiene que tener rango  $n$ .

Así podremos decir que la condición necesaria y suficiente para que un sistema sea observable es que el rango de la matriz de observabilidad sea  $n$ .

$$rango(M_o) = n \tag{3.7}$$

## 3.2. Diseño de observadores de estado

Tal y como hemos comentado anteriormente en el TRMS de todas las variables de estado que tenemos únicamente son medibles  $\theta$ ,  $\psi$ ,  $\omega_m$  y  $\omega_t$  es por esto que resulta necesario estimar las variables el resto de variables de estado. La estructura genérica de un observador de estado responde al esquema mostrado en la figura 3.2.

Puesto que se está suponiendo que las variables de estado no son accesibles o medibles, la única información que podemos utilizar para determinar el estado en el que está el sistema son las entradas que se le suministran y las salidas con las que éste responde. En el caso de que ninguna de las variables de estado sea medible necesitaremos que el observador de estado estime todas ellas, a este tipo de observador se le denomina observador de orden completo. No obstante este no es nuestro caso es por eso que nos vamos a centrar en el observador de orden reducido.

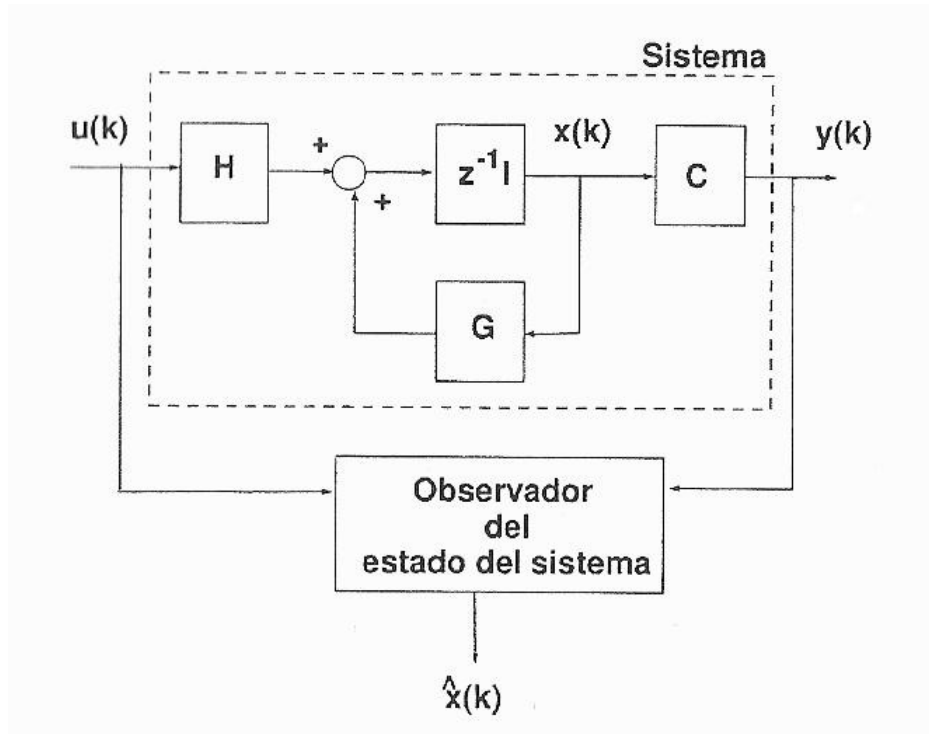


Figura 3.2: Sistema con observador de estado

### 3.2.1. Observador de orden reducido

Los estimadores de estado de orden reducido tienen por objetivo estimar las variables de estado que no son medibles. Este tipo de observadores se utilizan cuando parte de las variables de estado del sistema son variables de salida, tal y como es nuestro caso.

Supongamos que en el modelo del sistema tenemos que una parte de las variables de estado son medibles  $x_m$  y otra parte de las variables no  $x_n$ . Si dividimos el vector de estado  $x$  en dos submatrices, el modelo de estado del sistema nos queda de la siguiente forma

$$\begin{bmatrix} x_m(k+1) \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{mm} & A_{mn} \\ A_{nm} & A_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_m(k) \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_m \\ B_n \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_m(k) \\ x_n(k) \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

Si esta expresión matricial la ponemos en forma de ecuaciones tenemos

$$\begin{aligned} x_m(k+1) &= A_{mm}x_m(k) + A_{mn}x_n(k) + B_mu(k) \\ x_n(k+1) &= A_{nm}x_m(k) + A_{nn}x_n(k) + B_nu(k) \end{aligned} \quad (3.9)$$

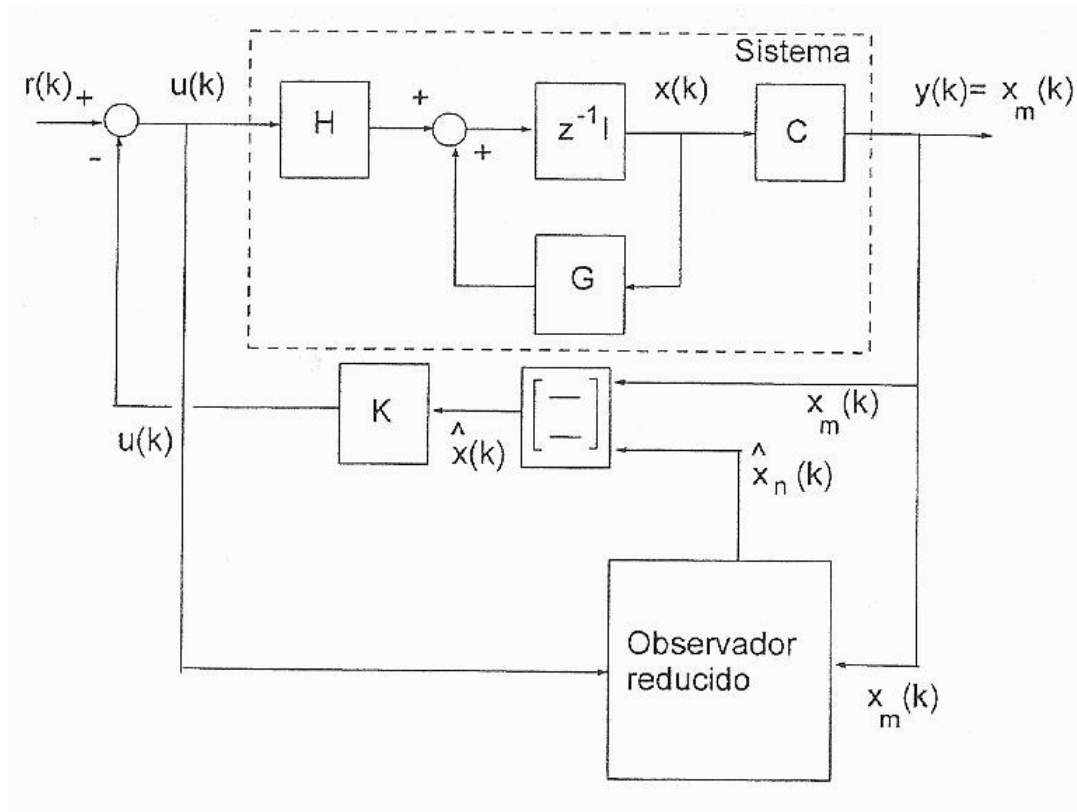


Figura 3.3: Observador de orden reducido

De la primera ecuación de 3.9 podemos medir o conocer todos los términos salvo el término en  $x_n(k)$  de la parte derecha de la expresión. Si separamos este término la ecuación nos queda

$$x_m(k+1) - A_{mm}x_m(k) - B_mu(k) = A_{mn}x_n(k) \quad (3.10)$$

y podemos reescribir la segunda de ecuación de 3.9 agrupando entre corchetes los términos medibles

$$x_n(k+1) = A_{nn}x_n(k) + [A_{nm}x_m(k) + B_nu(k)] \quad (3.11)$$

Si comparamos las ecuaciones 3.10 y 3.11 con las de un sistema ficticio genérico de la forma

$$x'(k+1) = A'x'(k) + B'u'(k) \quad (3.12)$$

$$y'(k) = C'x'(k) \quad (3.13)$$

donde

$$\begin{aligned}
 x'(k) &= x_n(k) \\
 y'(k) &= x_m(k+1) - A_{mm}x_m(k) - B_mu(k) \\
 A' &= A_{nn} \\
 B'u'(k) &= A_{nm}x_m(k) + B_nu(k) \\
 C' &= A_{mn}
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

Si para el sistema 3.10 un observador de estado tiene la forma

$$\hat{x}'(k+1) = (A' - LC')\hat{x}'(k) + B'u'(k) + Ly'(k) \tag{3.15}$$

sustituyendo aquí las matrices y vectores por las expresiones completas 3.15 nos queda que el observador para la parte no medible del sistema tiene la siguiente ecuación

$$\begin{aligned}
 \hat{x}(k+1) &= (A_{nn} - LA_{mn})\hat{x}_n(k) + A_{nm}x_m(k) + B_nu(k) + \\
 &\quad + L[x_m(k+1) - A_{mm}x_m(k) - B_mu(k)]
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

$$\hat{x}(k+1) = A\hat{x}(k) + Bu(k) + L[y(k) - \hat{y}(k)] \tag{3.17}$$

y en el diseño de este observador, tendremos que ajustar la matriz  $L$  de forma que los polos de la ecuación característica estén en unas posiciones que nos proporcionen el resultado que consideremos correcto. Para ello utilizaremos la técnica de asignación de polos mediante desigualdades lineales matriciales, LMI, propuesta por Mahmoud Chilali y Pascal Gahinet en [8].

### 3.3. Desigualdades lineales matriciales

Una desigualdad lineal matricial es una restricción de la forma:

$$A(x) = A_0 + x_1A_1 + \dots + x_nA_n < 0 \tag{3.18}$$

donde

- $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  es el vector de variables de decisión compuesto por  $n$  escalares desconocidos.
- $A_0, A_1, \dots, A_n$  son matrices simétricas conocidas.



- La desigualdad  $< 0$  en 3.18 indica la condición de *negativa definida* es decir, que el mayor autovalor de  $A(x)$  es negativo.

Una LMI define un problema convexo sobre la variable  $x$ , el cual se puede resolver numéricamente con la garantía de encontrar una solución, si existe alguna. Un sistema basado en múltiples LMIs puede ser considerado como un conjunto de LMIs simples, lo que permite que se mantenga la condición de convexidad.

### 3.3.1. Asignación de polos mediante LMI

En esta sección se detalla el procedimiento para la ubicación de los polos allí donde nos convenga. Sabemos que la respuesta transitoria de un sistema lineal está íntimamente relacionada con la localización de los polos en el plano complejo. Por ejemplo la respuesta a un escalón en un sistema de segundo orden con los polos en  $\lambda = -\zeta\omega_n \pm j\omega_d$  está totalmente determinada en términos de la frecuencia natural no amortiguada  $\omega_n = |\lambda|$ , el coeficiente de amortiguamiento  $\zeta$  y la frecuencia natural amortiguada  $\omega_d$ . Mediante la imposición de  $\lambda$  en una región determinada, podemos establecer límites específicos en estas magnitudes para asegurar una respuesta transitoria satisfactoria. Las regiones de interés incluyen regiones de estabilidad  $\alpha$  donde  $Re(s) \leq -\alpha$ , tiras verticales, discos, sectores cónicos, etcétera. Así nos interesa como podemos establecer dichas regiones mediante las LMI.

#### 3.3.1.1. Regiones LMI

Definimos las regiones LMI como subconjuntos  $\mathcal{D}$  del plano complejo caracterizado por

$$\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} | f_{\mathcal{D}}(z) < 0\} \quad (3.19)$$

donde

$$f_{\mathcal{D}}(z) = \alpha + z\beta + \bar{z}\beta^T = [\alpha_{kl} + \beta_{kl}z + \beta_{lk}\bar{z}]_{l \leq k, l \leq m} \quad (3.20)$$

siendo  $\alpha$  una matriz simétrica que pertenece a  $\mathcal{R}^{m \times m}$  y  $\beta$  una matriz que pertenece a  $\mathcal{R}^{m \times m}$ . Nótese que la función característica  $f_{\mathcal{D}}$  toma valores en el espacio de  $m \times m$  de las matrices Hermitianas y que la desigualdad  $< 0$  indica la condición de negativa definida.

En otras palabras, una región LMI es un subconjunto del plano complejo que está representado por una LMI en  $z$  y  $\bar{z}$ , o equivalentemente, una LMI en  $x = Re(z)$  e  $y = Im(z)$ . Como resultado, las regiones LMI son convexas. Además, las regiones LMI son simétricas respecto al eje real así para cualquier  $z \in \mathcal{D}$ ,  $f_{\mathcal{D}}(\bar{z}) = \overline{f_{\mathcal{D}}(z)} < 0$ .

Una vez definidas las regiones LMI hemos de plantearnos el problema de la ubicación de los polos en el interior de éstas. Para ello y dado que es posible la aplicación del teorema de Lyapunov en las regiones LMI haremos uso del mismo. Esto es

$$M_{\mathcal{D}}(A, X) = \alpha \otimes X + \beta \otimes (AX) + \beta^T \otimes (AX)^T = [\alpha_{kl}X + \beta_{kl}AX + \beta_{lk}XA^T]_{l \leq k, l \leq m} \quad (3.21)$$

donde la notación  $M = [a_{kl}]_{l \leq k, l \leq m}$  significa que  $M$  es una matriz  $m \times m$  con entrada genérica  $a_{kl}$ .

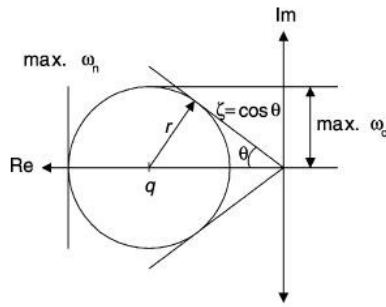
Entonces diremos que la matriz  $A$  es  $\mathcal{D}$ -estable si y solo si existe una matriz simétrica  $X$  tal que

$$M_{\mathcal{D}}(A, X) < 0, X > 0 \quad (3.22)$$

Nótese que  $M_{\mathcal{D}}(A, X)$  en 3.21 y  $f_{\mathcal{D}}$  en 3.20 están relacionadas por la sustitución  $(X, AX, XA^T) \longleftrightarrow (1, z, \bar{z})$ . Así el problema a resolver será el que plantea la ecuación 3.22.

Por último se muestran algunos ejemplos de regiones LMI de interés junto con la función característica de las mismas en los problemas de ubicación de polos.

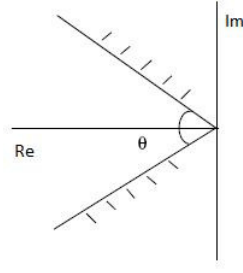
- Disco con centro en  $(-q, 0)$  y radio  $r$



$$f_{\mathcal{D}} = \begin{pmatrix} -r & q+z \\ q+\bar{z} & -r \end{pmatrix} \quad (3.23)$$

Figura 3.4: Región LMI. Disco

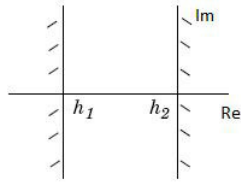
- Sector cónico centrado en el origen y ángulo interior  $\theta$



$$f_{\mathcal{D}} = \begin{pmatrix} \sin \frac{\theta}{2}(z + \bar{z}) & \cos \frac{\theta}{2}(z - \bar{z}) \\ -\cos \frac{\theta}{2}(z - \bar{z}) + \bar{z} & \sin \frac{\theta}{2}(z + \bar{z}) \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

Figura 3.5: Región LMI. Sector cónico

- Tiras verticales  $h_1 < x < h_2$



$$f_{\mathcal{D}} = \begin{pmatrix} 2h_1 - (z + \bar{z}) & 0 \\ 0 & (z + \bar{z} - 2h_2) \end{pmatrix} \quad (3.25)$$

Figura 3.6: Región LMI. Tiras verticales

### 3.4. Diseño del observador

El diseño del observador puede solucionarse con la técnica de asignación de polos con LMI, sección 3.3.1., que permite localizar los polos del observador en una subregión de la parte izquierda del plano complejo mediante el uso de una región LMI.

En nuestro caso particular hemos utilizado un disco como región LMI definido por la ubicación del centro del disco en  $(-q, 0)$  y el radio,  $r$ , del mismo tal que  $(q + r) < 1$ . Los dos escalares  $q$  y  $r$  son utilizados para determinar una región específica incluida dentro del círculo unidad donde hemos de ubicar los valores propios del observador, para que este tenga un comportamiento estable. Entonces, esta región circular impone un límite inferior en el decremento exponencial y en el coeficiente de amortiguamiento de la respuesta en lazo cerrado. El diseño del observador LPV de manera que los polos del observador estén situados en el interior de la región LMI descrita requiere determinar para cada submodelo  $j$  (con  $j \in [1, \dots, N]$ ) la ganancia del observador  $L_j$  y la matriz simétrica  $X_j = X_j^T > 0$  esto es:

$$\begin{pmatrix} -rX_j & qX_j + X_j^T(A_j(\rho) - L_jC_j(\rho)) \\ (q + [A_j(\rho) - L_jC_j(\rho)]^T)X_j & -rX_j \end{pmatrix} < 0 \quad (3.26)$$

La expresión 3.26 es una desigualdad matricial bilineal, BMI, la cual no puede solu-

cionarse con las herramientas clásicas de las LMI. Pero si realizamos la siguiente sustitución  $W_j = L_j^T X_j$  es posible transformar 3.26 en

$$\begin{bmatrix} -rX_j & qX_j + X_j^T A_j(\rho) - W_j^T C_j(\rho) \\ (q + A_j(\rho)^T)X_j - C_j(\rho)^T W_j & -rX_j \end{bmatrix} < 0 \quad (3.27)$$

La expresión 3.27 ahora sí que se trata de una LMI, entonces el procedimiento de diseño consistirá en la resolución del LMI de la ecuación 3.27 y después determinaremos la matriz de ganancia del observador deshaciendo el cambio de variable realizado mediante la expresión.

$$L_j = (W_j X_j^{-1})^T \quad (3.28)$$

Para la resolución de la ecuación 3.27 hemos hecho uso de la *LMI toolbox* de *Matlab*. Con la ayuda de dicho programa hemos implementado una función que nos calcula cada una de las matrices de ganancia para los 16 submodelos de los que está compuesto nuestro modelo LPV, dicha función calcula las ganancias a partir de los parámetros de la región LMI  $q$  y  $r$  y las matrices de cada submodelo  $A_i$  y  $C_i$ . Los valores que caracterizan la región LMI utilizada son:

$$\begin{aligned} q &= -0,6 \\ r &= 0,4 \end{aligned}$$

A continuación se presentan los resultados obtenidos entre el modelo no lineal y el modelo LPV con el observador de estado para entradas de la tabla 1.3. Además se muestra la implementación del observador en *Simulink*, la estructura general para el observador es la misma que la del modelo LPV, figura 2.2, añadiendo la matriz de ganancia a cada submodelo en la representación en espacio de estados, ver figura 3.7

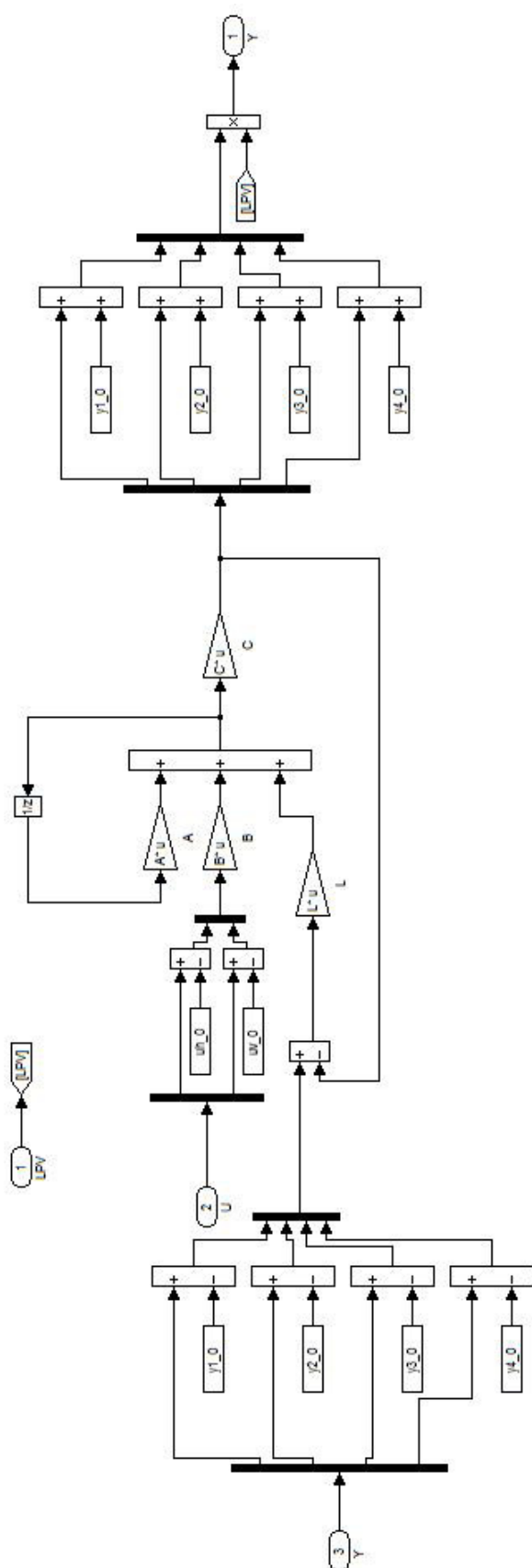


Figura 3.7: *Simulink* del Modelo 1 en espacio de estados con el observador

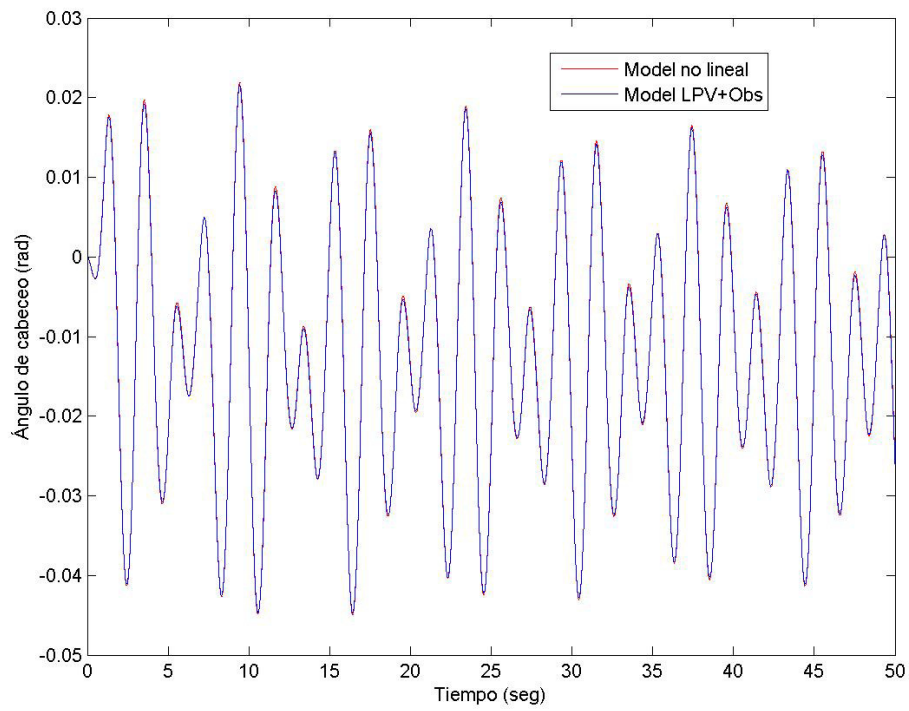


Figura 3.8: Ángulo de cabeceo (entrada 1)

En las figuras 3.8 a 3.17 observamos que el modelo LPV con el observador de estado sigue de manera satisfactoria el modelo no lineal.

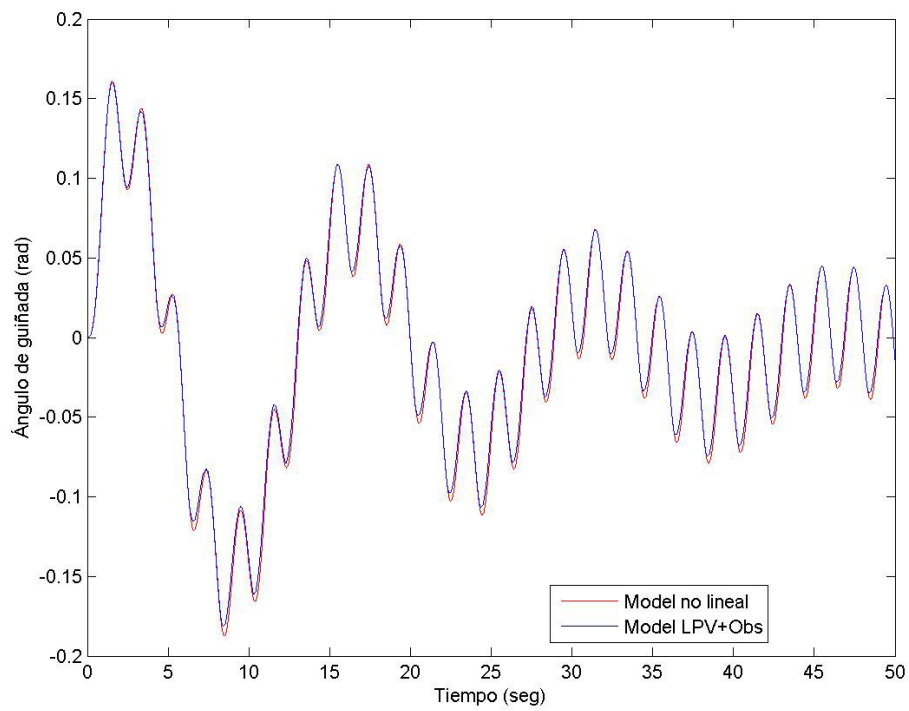


Figura 3.9: Ángulo de guiñada (entrada 1)

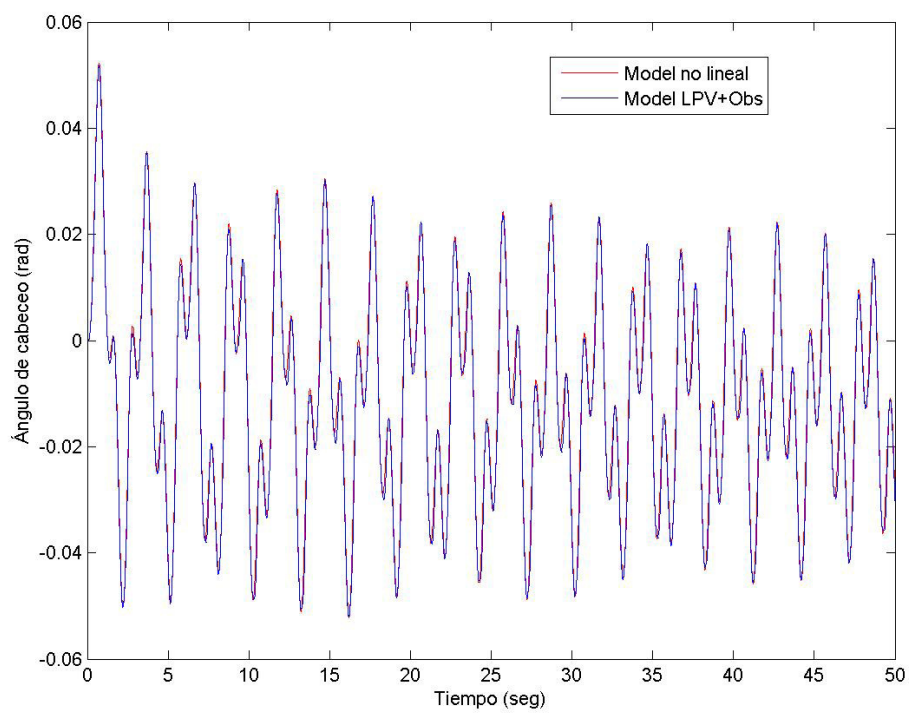


Figura 3.10: Ángulo de cabeceo (entrada 2)

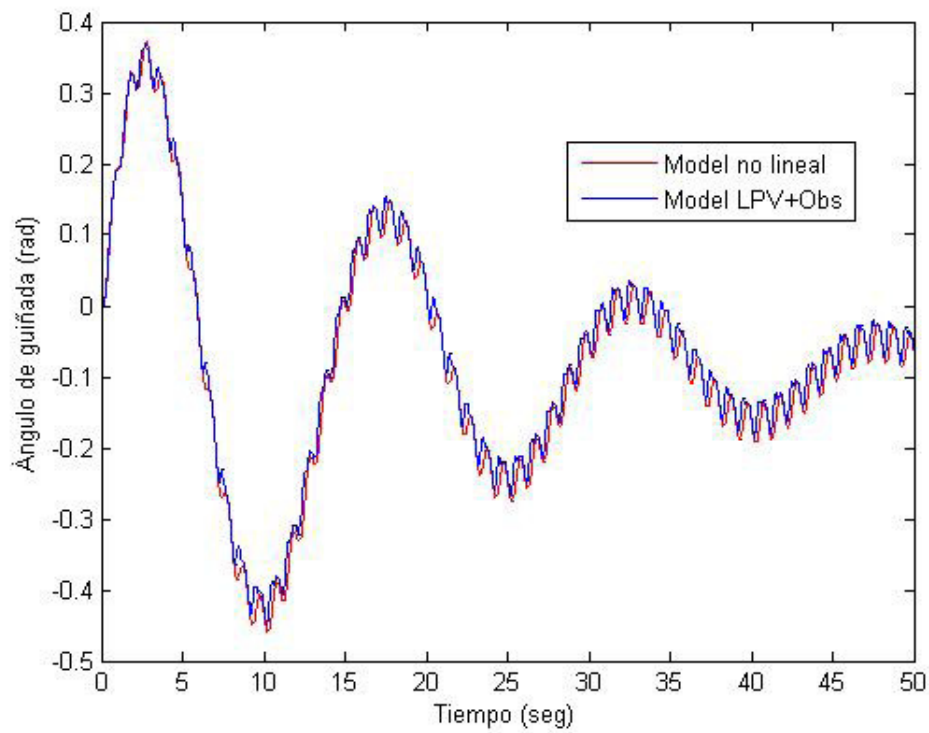


Figura 3.11: Ángulo de guiñada (entrada 2)

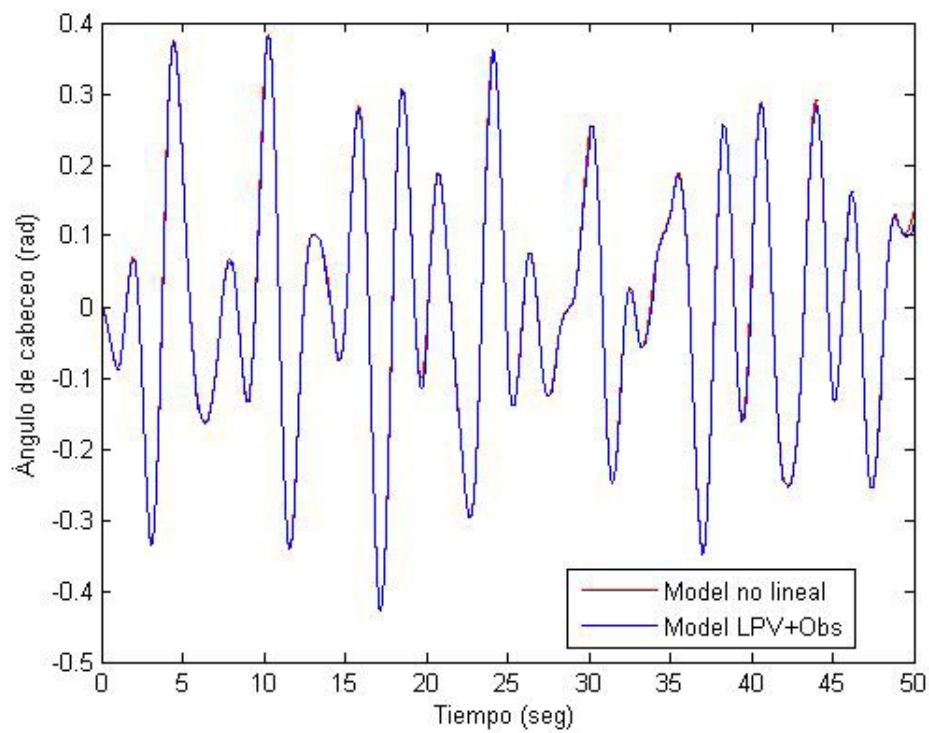


Figura 3.12: Ángulo de cabeceo (entrada 3)



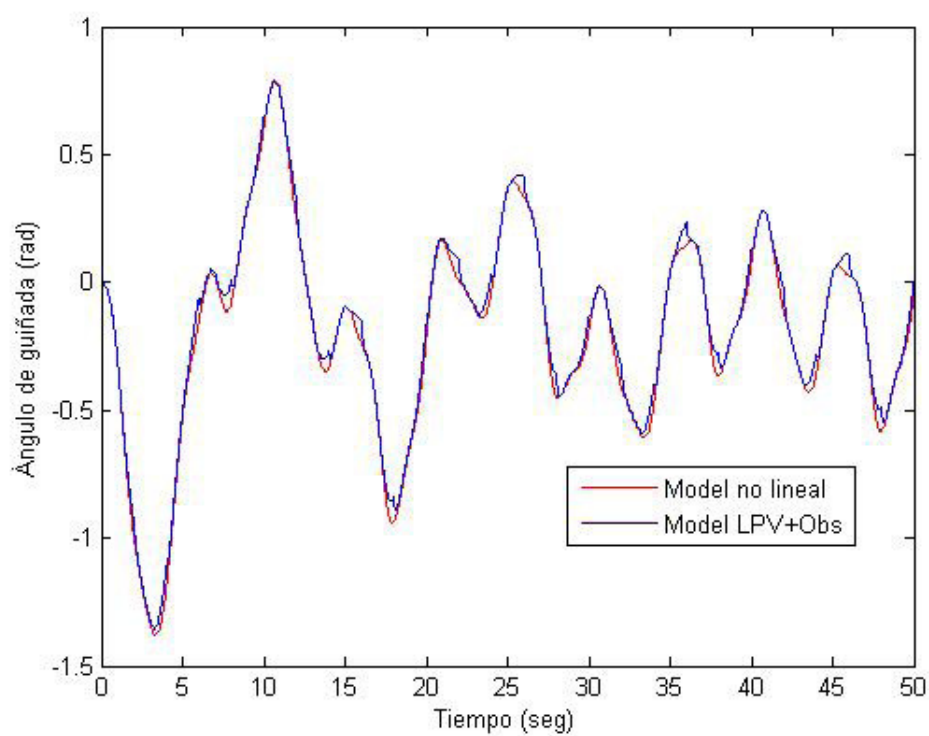


Figura 3.13: Ángulo de guiñada (entrada 3)

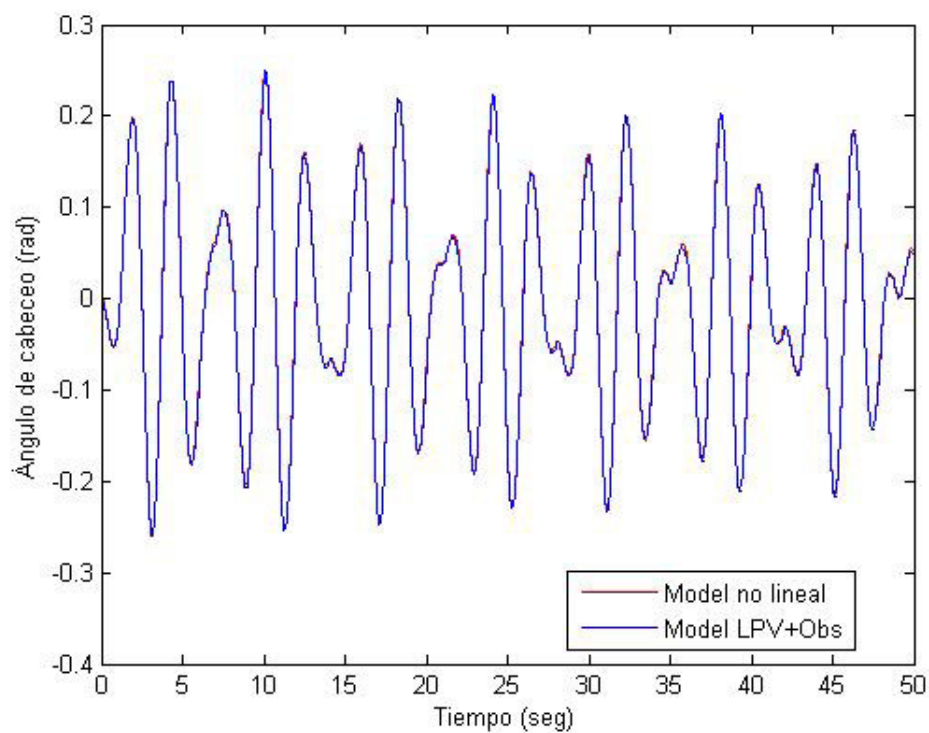


Figura 3.14: Ángulo de cabeceo (entrada 4)

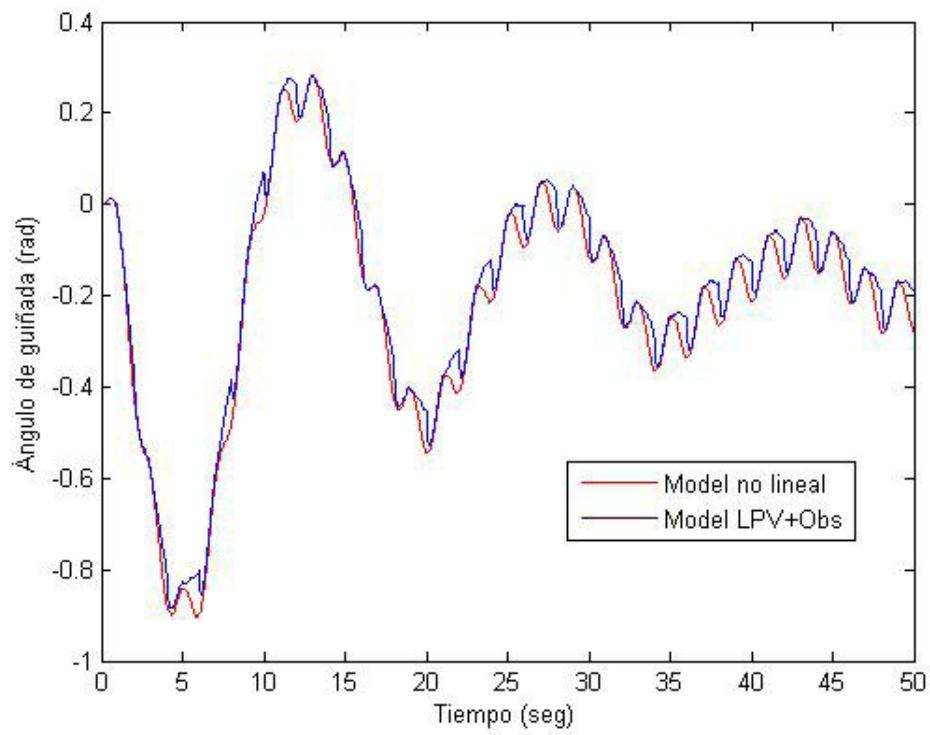


Figura 3.15: Ángulo de guiñada (entrada 4)

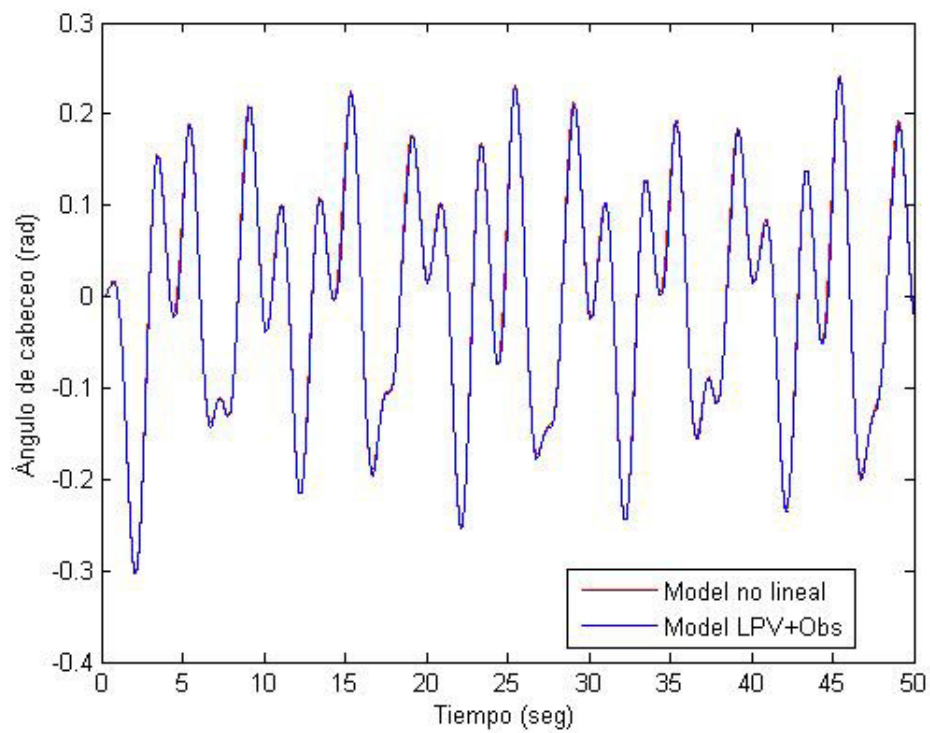


Figura 3.16: Ángulo de cabeceo (entrada 5)

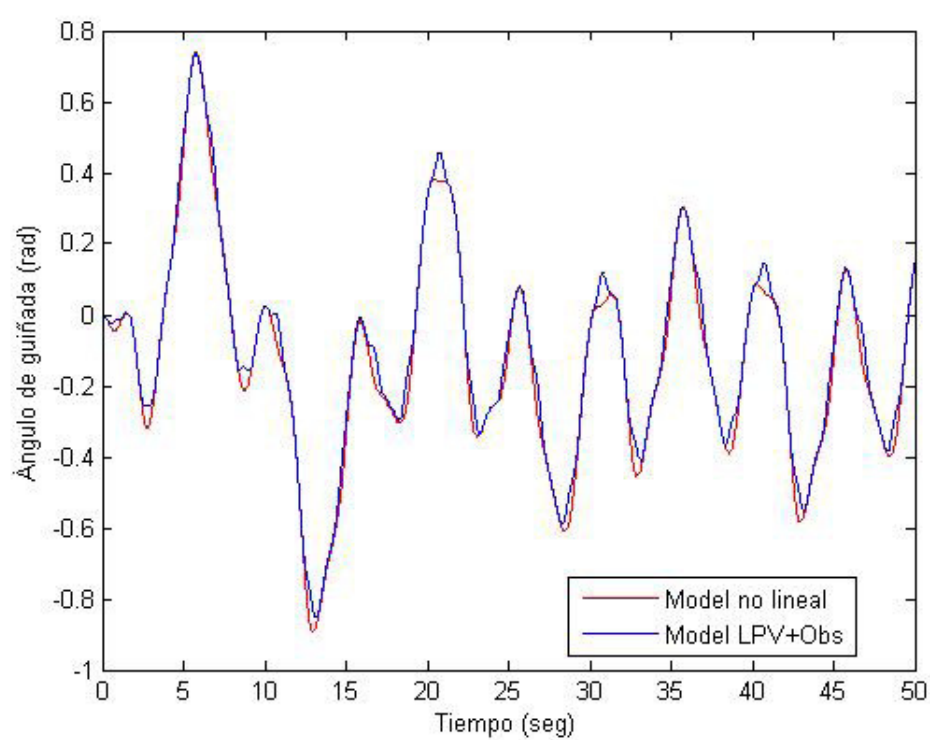


Figura 3.17: Ángulo de guiñada (entrada 5)



## CAPÍTULO 4. DISEÑO DEL CONTROLADOR

En este capítulo siguiendo con el trabajo desarrollado en el capítulo 3 se le expondrán al lector más conceptos básicos del diseño de sistemas de control en el espacio de estados. En primer lugar se introducirán los conceptos de controlabilidad y control por realimentación de estado. De nuevo y al igual que en el capítulo 3 haremos uso de las LMI para el diseño de las ganancias del controlador. Por último se le presentará al lector el resultados obtenidos por el controlador diseñado.

### 4.1. Controlabilidad de estado

Al igual que hicimos en el capítulo 3 vamos a considerar un sistema en espacio de estado en tiempo discreto representado por la ecuación 2.45. Diremos que el sistema de control, de dimensión  $n$ , es completamente controlable en estado si existe una entrada  $u$  definida entre  $[0, n-1]$  tal que es posible hacer pasar al sistema desde un estado inicial arbitrario  $x(0)$  a otro estado final arbitrario  $x(n)$  en un periodo finito de tiempo ( $n$  periodos de muestreo).

De forma intuitiva, podemos pensar que si una variable de estado es independiente de la señal de control, entonces resulta imposible controlar la evolución de esta variable de estado y por lo tanto el sistema no será controlable. Veamos cómo se puede analizar si un sistema es o no controlable.

Vamos a estudiar la controlabilidad para un sistema lineal de tiempo discreto invariante en el tiempo con entrada de tipo escalar. Supongamos que el sistema viene definido por la siguiente ecuación de estado:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \quad (4.1)$$

donde  $A : n \times n$ ,  $B : n \times 1$ ,  $x : n \times 1$  y  $u : 1 \times 1$ . Recordando que la solución de la ecuación de estado para un sistema lineal de tiempo discreto invariante tenía la forma

$$x(n) = A^n x(0) + \sum_{j=0}^{n-1} A^{n-j-1} Bu(j) \quad (4.2)$$

que si lo expresamos en forma matricial tenemos

$$x(n) - A^n x(0) = [B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B] \begin{bmatrix} u(n-1) \\ u(n-2) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

Dado que  $B$  es una matriz  $n \times 1$  y que  $A$  es  $n \times n$ , la matriz

$$M_c = [B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B] \quad (4.4)$$

tendrá dimensiones  $n \times n$ . En el sistema de ecuaciones 4.3 conocemos los estados iniciales,  $x(0)$ , y final,  $x(n)$ , y podemos calcular la matriz  $M_c$ . Para poder determinar el vector de entradas de control se tiene que verificar que el rango de la matriz  $M_c$  sea  $n$ . A la matriz  $M_c$  se le denomina matriz de controlabilidad.

La condición necesaria y suficiente para que un sistema sea completamente controlable en estado es que el rango de la matriz de controlabilidad sea  $n$ .

$$\text{rango}(M_c) = n \quad (4.5)$$

## 4.2. Controlabilidad de la salida

En la sección anterior se ha comentado el concepto de controlabilidad de estado. El hecho de que un sistema sea completamente controlable en estado no nos garantiza que podamos controlar la salida del sistema, salvo en el caso en el que el sistema tenga una única salida. En general cuando se diseña un sistema de control lo que se busca es controlar la salida del sistema más que controlar el estado del mismo. Por ello, es necesario realizar un análisis similar al anteriormente indicado para la controlabilidad completa del estado, pero en este caso para la salida.

Diremos que un sistema de control de dimensión  $n$  es completamente controlable en la salida si existe una entrada  $u$  definida entre  $[0, n-1]$  tal que es posible hacer pasar al sistema desde una salida inicial arbitraria  $y(0)$  a otra salida final arbitraria  $y(n)$  en un periodo finito de tiempo ( $n$  periodos de muestreo).

Veamos la controlabilidad de salida para un sistema lineal de tiempo discreto invariante en el tiempo con entrada de tipo escalar. Supongamos que el sistema viene definido por las siguientes ecuaciones:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \quad (4.6)$$

$$y(k) = Cx(k) \quad (4.7)$$

donde  $A : n \times n$ ,  $B : n \times 1$ ,  $C : m \times n$ ,  $x : n \times 1$ ,  $u : 1 \times 1$ ,  $y : m \times 1$  y  $m \leq n$ . Recordando que la solución de la ecuación de estado para un sistema lineal de tiempo discreto invariante viene dado por la ecuación 4.2 de donde tenemos que la salida del sistema tendrá la siguiente expresión

$$y(n) = CA^n x(0) + \sum_{j=0}^{n-1} CA^{n-j-1} Bu(j) \quad (4.8)$$

y de aquí que

$$y(n) - CA^n x(0) = [CB \quad CAB \quad \dots \quad CA^{n-1}B] \begin{bmatrix} u(n-1) \\ u(n-2) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

Dado que  $B$  es una matriz  $n \times 1$  y que  $A$  es  $n \times n$ , que  $C$  es una matriz  $m \times n$ , la matriz de controlabilidad de la salida  $M_{CS} = [CB \quad CAB \quad \dots \quad CA^{n-1}B]$  tendrá dimensiones  $m \times n$ . En el sistema de ecuaciones 4.9 conocemos los estados inicial  $y(0)$  y final  $y(n)$ , y podemos calcular la matriz  $M_{CS}$ . Para poder determinar el vector de entradas de control se tiene que verificar que el rango de la matriz  $M_{CS}$  es  $m$ . A la matriz  $M_{CS}$  se le denomina matriz de controlabilidad de la salida.

La condición necesaria y suficiente para que un sistema sea completamente controlable en la salida es que el rango de la matriz de controlabilidad de la salida sea  $m$ .

$$\text{rango}(M_{CS}) = m \quad (4.10)$$

La contralabilidad completa de estado implica controlabilidad completa de la salida si y solo si las  $m$  filas de la matriz  $C$  son linealmente independientes.

### 4.3. Control por realimentación de estado

El control por realimentación de estado consiste en ubicar los polos del sistema en lazo cerrado a partir de una matriz de ganancia  $K$ . Si un sistema es completamente controlable en estado, entonces los polos en lazo cerrado del sistema pueden ser libremente situados en las posiciones  $p_1, p_2, \dots, p_n$  que se deseen mediante una realimentación de estado con una matriz  $K$  de ganancias adecuada.

Este esquema de control que se muestra en la figura 4.3. hará que la ecuación característica del sistema realimentado tome la forma

$$(z - p_1)(z - p_2) \dots (z - p_n) = 0 \quad (4.11)$$

La elección de las posiciones deseadas de los polos se hace de forma que se cumplan unas ciertas especificaciones de diseño. Esta técnica es aplicable sólo a sistemas lineales invariantes en el tiempo. Veamos cómo podemos determinar el valor

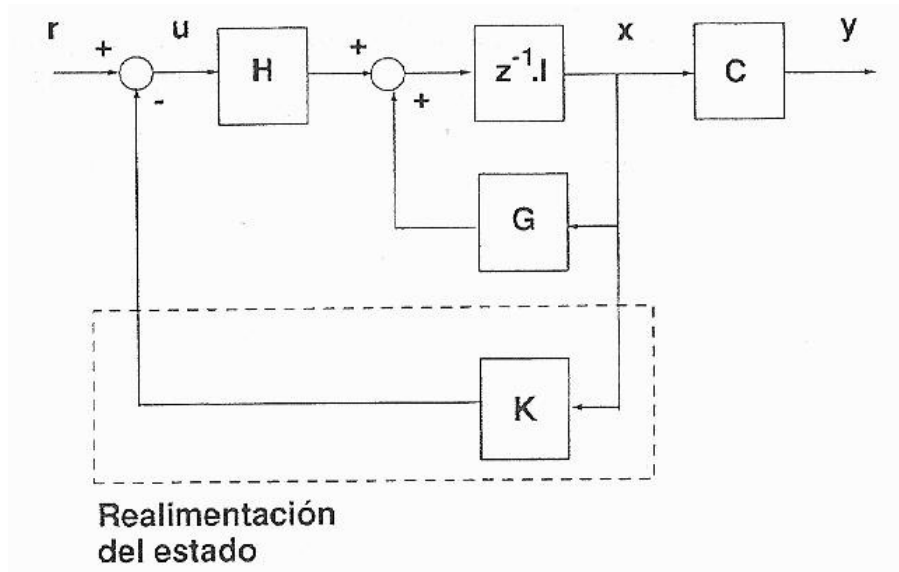


Figura 4.1: Sistema con realimentación de estado

de la matriz de ganancias que nos permite situar los polos del sistema realimentado en el lugar deseado. Esta técnica de control nos va a permitir situar los polos del sistema realimentado en las posiciones que deseemos para que se cumplan ciertos requisitos en cuanto a la respuesta dinámica del sistema. El mero hecho de poder situar los polos en las posiciones que deseemos no nos garantiza que el sistema cumpla las especificaciones de régimen permanente ya que esta técnica no permite modificar las posiciones de los ceros del sistema.

Supongamos el sistema mostrado en la figura 4.3., las ecuaciones del mismo son

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k) \end{aligned} \quad (4.12)$$

donde  $A: n \times n$ ,  $B: n \times 1$ ,  $C: 1 \times n$ ,  $x: n \times 1$ ,  $u: 1 \times 1$ ,  $y: 1 \times 1$  Además, la señal de control al sistema viene dada por la siguiente expresión

$$u(k) = r(k) - Kx(k) \quad (4.13)$$

De las ecuaciones 4.12 y 4.13 tenemos (siendo  $K$  de dimensión  $1 \times n$ )

$$x(k+1) = [A - BK]x(k) + Br(k) \quad (4.14)$$

Tomando transformada  $z$ , se tiene

$$zX(z) = (A - BK)X(z) + BR(z) \quad (4.15)$$



por lo tanto,

$$(zI - A + BK)X(z) = BR(z) \quad (4.16)$$

$$X(z) = (zI - A + BK)^{-1}BR(z) \quad (4.17)$$

la salida tendrá la expresión

$$Y(z) = C[zI - G + BK]^{-1}BR(z) \quad (4.18)$$

de donde se tiene que la función de transferencia del sistema realimentado tendrá la siguiente forma

$$F(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = C[zI - A + BK]^{-1} \quad (4.19)$$

en la ecuación 4.19 se puede observar que el denominador de la función de transferencia viene dado por el determinante de  $|zI - (A - BK)|$ . Por tanto, si deseamos un cierto comportamiento dinámico del sistema, nos basta con ajustar las posiciones de los polos del sistema en lazo cerrado. Para ello, es necesario determinar en primer lugar las posiciones  $p_1, p_2, \dots, p_n$  deseadas para los polos, con ello determinamos la ecuación característica deseada y de aquí

$$|zI - (A - BK)| = (z - p_1)(z - p_2) \dots (z - p_n) \quad (4.20)$$

En la expresión 4.20 lo único que no se conoce son los valores de los coeficientes de la matriz  $K$ , pero igualando los coeficientes con del término del lado izquierdo a los de la parte derecha de la expresión es posible resolver el sistema. La condición necesaria y suficiente para poder resolver este sistema es que el rango de la matriz de controlabilidad de estado sea  $n$ , es decir, que el sistema sea totalmente controlable. Este es el procedimiento clásico para sintonizar la matriz de ganancias de control, pero al igual que en el caso del observador de estado haremos uso de la asignación de polos mediante LMI.

Para ello y al igual que en 3.4. utilizaremos un disco como región LMI con las mismas características descritas en 3.4., realizando los cambios pertinentes en la ecuación 3.26 para el caso del diseño del controlador tenemos

$$\begin{pmatrix} -rX_j & qX_j + X_j^T(A_j(\rho) - B_j(\rho)K_j)^T \\ (q + [A_j(\rho) - B_j(\rho)K_j])X_j & -rX_j \end{pmatrix} < 0 \quad (4.21)$$

De nuevo tenemos que la expresión 4.21 es una desigualdad matricial bilineal, BMI, la cual no puede solucionarse con las herramientas clásicas de las LMI. Pero si realizamos la siguiente sustitución  $W_j = K_jX_j$  es posible transformar 4.21 en

$$\begin{bmatrix} -rX_j & qX_j + X_j^T A_j^T(\rho) - W_j^T B_j^T(\rho) \\ (q + A_j(\rho))X_j - B_j(\rho)W_j & -rX_j \end{bmatrix} < 0 \quad (4.22)$$

$$k_j = W_j X_j^T \quad (4.23)$$

Llegados a este punto el procedimiento de diseño es el mismo que en 3.4. teniendo en cuenta que los polos del controlador han de ser más lentos que los del observar, esto significa que la región LMI del controlador ha de estar mas alejada del eje imaginario del plano complejo que la del observador. Los valores que caracterizan la región LMI utilizada son:

$$\begin{aligned} q &= 0 \\ r &= 0,8 \end{aligned}$$

A continuación se presentan los resultados obtenidos para un salida deseada consistente en diversos escalones aplicados en el tiempo, en la tabla 4.1. se resumen las características de la misma.

		Tipo	Tiempo (s)	Amplitud (V)
<b>Entrada 1</b>	Rotor principal	Escalón	250	0.05
<b>Entrada 2</b>	Rotor principal	Escalón	350	0.05

Tabla 4.1: Salida deseada

En las figuras 4.2 a 4.6 podemos observar los resultados para la salida deseada. En ellas podemos observar que el modelo no lineal sigue satisfactoriamente la salida impuesta, entonces podemos asegurar que el controlador está bien diseñado. Por último en las figuras 4.7 y 4.8 se muestra el esquema general de la estrategia de control y el detalle de un modelo en concreto respectivamente en *Simulink*.

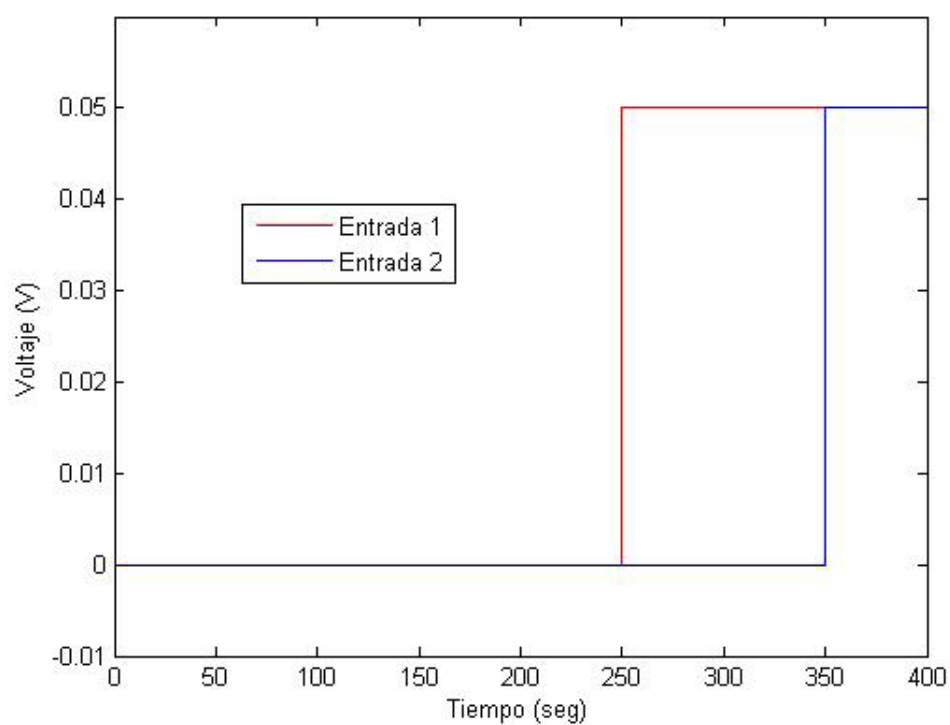


Figura 4.2: Salida deseada por el modelo no lineal

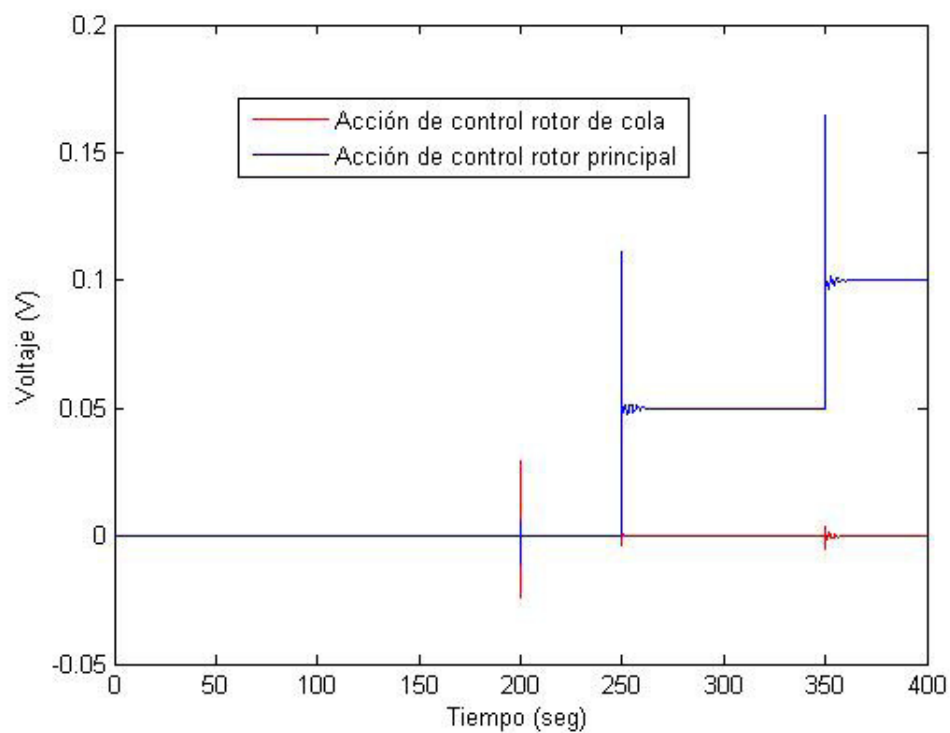


Figura 4.3: Acción de control

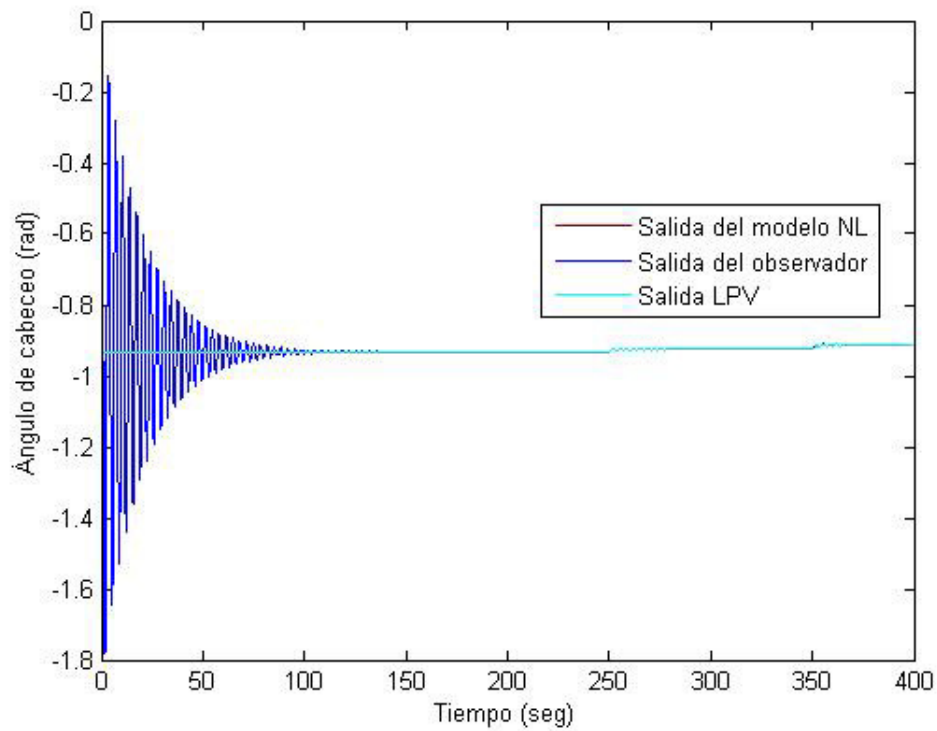


Figura 4.4: Respuesta del sistema a la salida deseada. Ángulo de cabeceo

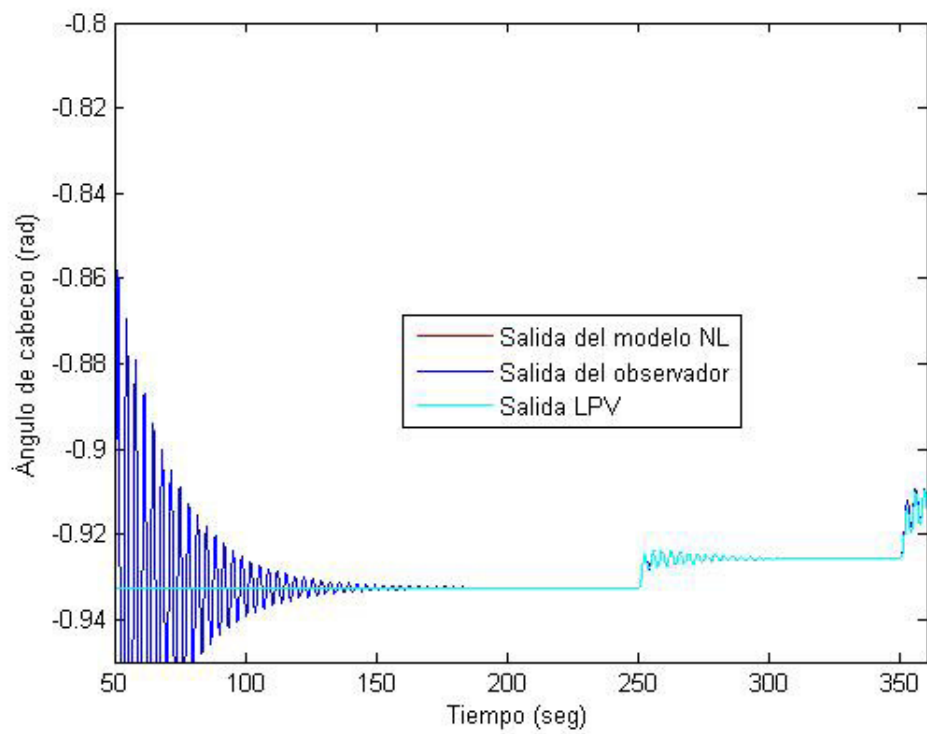


Figura 4.5: Ampliación de la respuesta del sistema para el ángulo de cabeceo

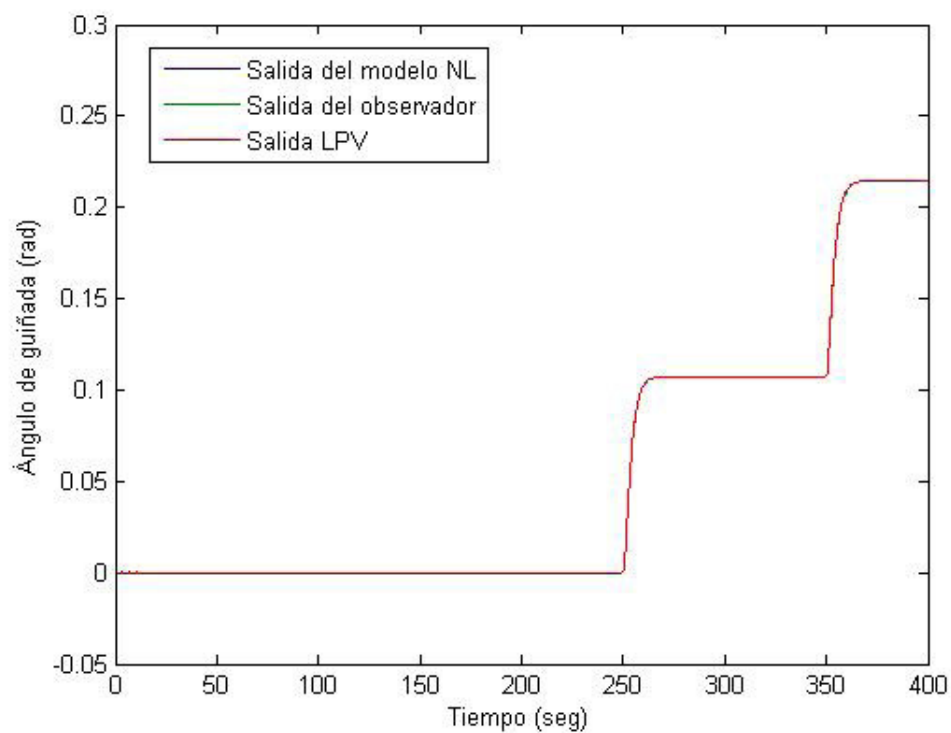


Figura 4.6: Respuesta del sistema a la salida deseado. Ángulo de guiñada

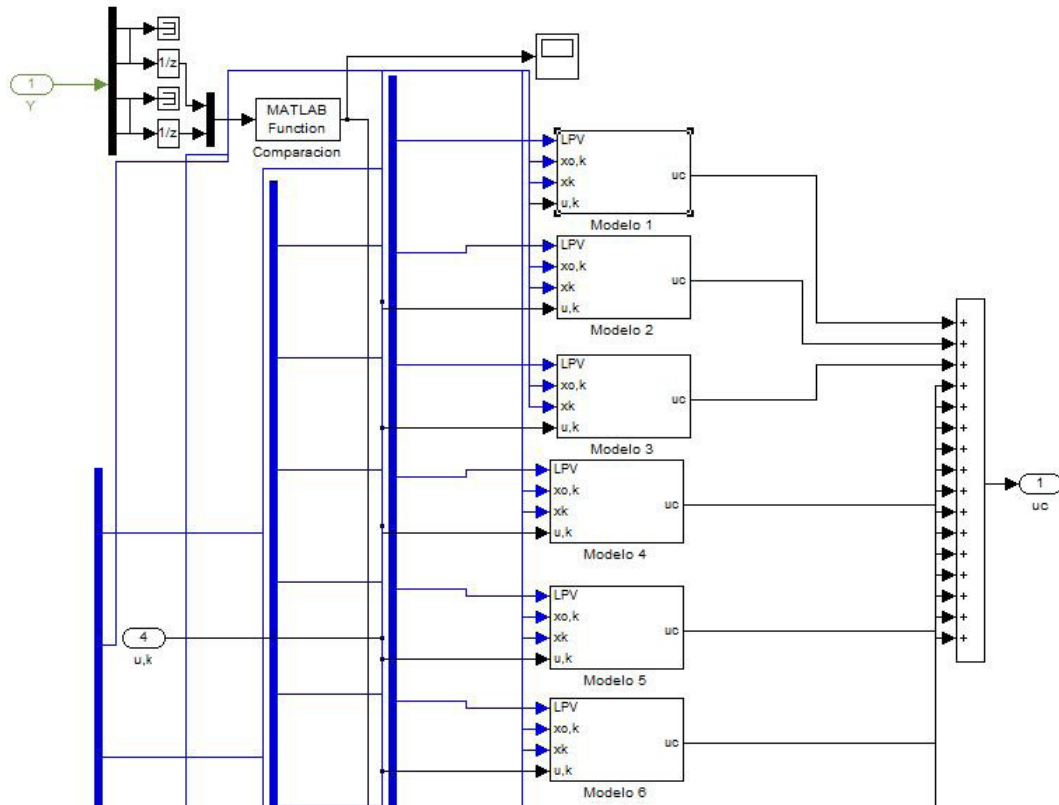


Figura 4.7: Fragmento en *Simulink* de la estrategia de control

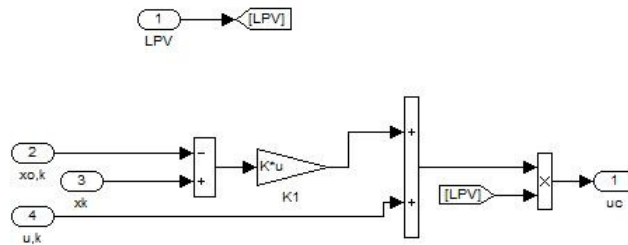


Figura 4.8: *Simulink* del controlador del Modelo 1

## CAPÍTULO 5. CONCLUSIONES

El objetivo principal del presente proyecto es el diseño de un sistema de control mediante técnicas LPV del *Twin Rotor MIMO System*, para ello se han marcado varios objetivos intermedios.

El primero de ellos es el modelado dinámico del sistema, el cual se ha realizado a partir de la mecánica newtoniana. En el desarrollo del modelo completo del sistema, varias partes se han modelado por separado para después integrarlas simplificando así el problema inicial. Las respuestas del modelo no lineal obtenido se han comparado con las del modelo obtenido en [1] las que a su vez han sido validadas con la planta real del sistema de forma satisfactoria. En esta comparación se ha visto que el modelo obtenido tiene un comportamiento adecuado en la representación del sistema. Una vez obtenido el modelo no lineal del sistema el siguiente paso es la elaboración de un modelo *linear parameter varying*, LPV.

El modelo LPV consiste en una familia de modelos linealizados en distintos puntos de operación con una aproximación jacobiana, para tener el comportamiento completo representado por el modelo no lineal es necesario integrar los distintos modelos linealizados a través de una función de interpolación entre ellos. El modelo LPV obtenido describe el comportamiento completo del sistema, no obstante en la planta real no todas las variables son accesibles para diseñar el controlador. Este problema se ha solventado diseñando un observador de estado.

El diseño del observador de estado se ha realizado a partir de las desigualdades lineales matriciales. Se ha comprobado que el uso de las LMI para el diseño de observadores es una técnica que permite el uso de algoritmos matemáticos de convergencia segura. Todos los problemas considerados permiten contemplar respuestas del tipo: no existe una ganancia de la clase propuesta o bien si existe la ganancia es ésta.

Una vez integrado el observador en el modelo LPV éste ya es capaz de describir el comportamiento completo del sistema. Las respuestas del modelo LPV se han comparado con las obtenidas por el modelo no lineal, previamente validado. En esta comparación se ha comprobado que el modelo obtenido sigue satisfactoriamente al modelo no lineal.

Por último se ha diseñado el controlador del sistema por realimentación de estado. El diseño de la matriz de ganancia del controlador también se ha hecho mediante LMI. Las respuestas del controlador se han comparado con la salida deseada. En esta comparación se ha comprobado que el controlador sigue satisfactoriamente la salida.

Si bien el objetivo principal del proyecto se ha alcanzado satisfactoriamente, el proyecto no se puede considerar cerrado. El modelo obtenido y por tanto controlado no está ajustado a la planta real disponible, antes de poder usar el controlador diseñado en la planta real hay que ajustar el modelo a ésta. La calibración se realizaría

a partir del diseño de experimentos sobre la planta real y el empleo de técnicas de optimización. Una vez ajustado el modelo a la planta real también debería reconsiderarse las matrices de ganancias del observador y del controlador. Es por esto que podemos decir que este proyecto queda abierto para futuras investigaciones.



# LISTA DE SÍMBOLOS

Símbolo	Descripción
$AoA$	Ángulo de ataque
$B_m$	Coeficiente de fricción viscosa del motor del rotor principal ( $kgm^2/s$ )
$B_t$	Coeficiente de fricción viscosa del motor del rotor de cola ( $kgm^2/s$ )
$g$	Aceleración de la gravedad ( $m/s^2$ )
$H_h$	Momento angular en el plano horizontal ( $rad/s$ )
$H_v$	Momento angular en el plano vertical ( $rad/s$ )
$i_m$	Intensidad en el motor del rotor principal (A)
$i_t$	Intensidad en el motor del rotor de cola (A)
$J_m$	Momento de inercia alrededor del eje horizontal ( $kgm^2$ )
$J_t$	Momento de inercia alrededor del eje vertical ( $kgm^2$ )
$J_{mr}$	Momento de inercia del motor del rotor principal ( $kgm^2$ )
$J_{tr}$	Momento de inercia del motor del rotor de cola ( $kgm^2$ )
$k_a$	Constante de momento ( $Nm/A$ )
$k_{chn}$	Constante experimental del momento del cable
$k_{chp}$	Constante experimental del momento del cable
$k_{Tmn}$	Constante experimental de la tracción del rotor principal
$k_{Tmp}$	Constante experimental de la tracción del rotor principal
$k_{Tin}$	Constante experimental de la tracción del rotor de cola
$k_{Ttp}$	Constante experimental de la tracción del rotor de cola
$k_g$	Constante experimental del momento giroscópico
$k_h$	Constante experimental del momento de la fricción horizontal
$k_m$	Constante experimental de la velocidad angular en el plano vertical
$k_t$	Constante experimental de la velocidad angular en el plano horizontal
$k_{th}$	Constante experimental de la velocidad angular del rotor de cola
$k_{tv}$	Constante experimental de la velocidad angular del rotor principal
$k_v$	Constante experimental del momento de la fricción vertical
$L$	Impedancia de los motores del rotor principal y del de cola (H)
$l_c$	Longitud de la viga del contrapeso (m)
$l_{cb}$	Distancia entre el contrapeso y el punto de pivote (m)
$l_m$	Longitud de la viga del rotor principal (m)
$l_t$	Longitud de la viga del rotor de cola (m)
$m_b$	Peso de la viga del contrapeso (kg)
$M_{cable}$	Momento del cable (Nm)
$m_{cb}$	Peso del contrapeso (kg)
$M_{Fc}$	Momento de la fuerza centrípeta (Nm)
$M_{fh}$	Momento de la fuerza de fricción horizontal (Nm)
$M_{fv}$	Momento de la fuerza de fricción vertical (Nm)
$M_g$	Momento giroscópico (Nm)
$M_{gra}$	Momento gravitatorio (Nm)
$M_m$	Momento de la tracción del rotor principal (Nm)
$m_m$	Peso de la viga del rotor principal (kg)
$m_{mr}$	Peso del motor del rotor principal (kg)
$m_{ms}$	Peso de la coraza del rotor principal (kg)

$M_t$	Momento de la tracción del rotor de cola ( $Nm$ )
$m_t$	Peso de la viga del rotor de cola ( $kg$ )
$m_{tr}$	Peso del motor del rotor de cola ( $kg$ )
$m_{ts}$	Peso de la coraza del rotor de cola ( $kg$ )
$N_b$	Número de palas del rotor
$R$	Resistencia de los motores del rotor principal y del de cola ( $\Omega$ )
$r_{ms}$	Radio de la coraza del rotor principal ( $m$ )
$r_{ts}$	Radio de la coraza del rotor de cola ( $m$ )
$T_m$	Tracción del rotor principal ( $N$ )
$T_t$	Tracción del rotor de cola ( $N$ )
$U_m$	Voltaje en el motor del rotor principal ( $V$ )
$U_t$	Voltaje en el motor del rotor de cola ( $V$ )
$\theta$	Ángulo de cabeceo del TRMS ( $rad$ )
$\psi$	Ángulo de guiñada del TRMS ( $rad$ )
$\omega_m$	Velocidad del rotor principal ( $rad/s$ )
$\omega_t$	Velocidad del rotor de cola ( $rad/s$ )

---

## BIBLIOGRAFÍA

### Publicaciones

- [1] Rahideh, A., Shaheed, M. H. *Mathematical dynamic modelling of a twin-rotor multiple input-multiple output system*. Proc. IMechE Vol. 221 Part I: J. Systems and Control Engineering.
- [2] Rahideh, A., Shaheed, M. H. *Dynamic modelling of a twin rotor mimo system using grey box approach*. Proceeding of the 5<sup>th</sup> International Symposium on Mechatronics and its Applications (ISMA08), Amman. 2008.
- [3] Ahmad, S. M., Chipperfield A. J., Tokhi, M. O. *Dynamic modelling and open-loop control of a twin rotor multi-input multi-output system*. Proc. Instn Mech Engrs Vol. 216 Part I: J. Systems and Control Engineering.
- [4] Marcos, A., Balas, G. J. *Development of Linear-Parameter-Varying Models for Aircraft*. Journal of Guidance, Control and Dynamics. Vol. 27, No.2, March-April 2004.
- [5] Szászi, I., Bokor, J. *Linear Parameter-Varying Detection Filter Design for a Boeing 747-100/200 Aircraft*. Journal of Guidance, Control and Dynamics. Vol. 28, No.3, May-June 2005.
- [6] Shin, J. Y. *Quasi-Linear Parameter Varying Representation of General Aircraft Dynamics Over Non-Trim Region*. NASA/CR-2005-213926. NIA Report No. 2005-08, December 2005.
- [7] Tan, W. *Applications of Linear Parameter Varying Control theory*. Master's research report, Department of Mechanical Engineering, University of California, Berkely, USA. May 1997.
- [8] Chilali, M., Gahinet, P.  *$H_\infty$  Design with Pole Placement Constraints: An LMI Approach*. IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 41, No. 3, March 1996.
- [9] Chilali, M., Gahinet, P., Apkarian, P. *Robust Pole Placement in LMI Regions*. Proceedings of the 36<sup>th</sup> Conference on Decision and Control. San Diego, California, USA. December 1997.
- [10] Montes de Oca, S., Puig, V. *Fault Diagnosis of Nonlinear Systems using LPV Interval Observers*. Advanced Control Systems Group, UPC.
- [11] Teppa Garrán, P. *Control Robusto de un sistema lineal de parámetros variantes (LPV): Un enfoque de las desigualdades matriciales lineales (LMI)*. Revista de la Facultad de Ingeniería de la U.C.V., Vol. 23, N°1. 2008.

- [12] Carter, L. H., Shamma, J. S. *Gain-Scheduled Bank-to-Turn Autopilot Design Using Linear Parameter Varying Transformations*. Journal of Guidance, Control and Dynamics. Vol. 19, No.5, September-October 1996.
- [13] Leith, D. J., Lethead, W. E. *Counter-example to a common LPV Gain-Scheduling Design Approach*. Department of Electronic and Electrical Engineering, University of Strathclyde, Glasgow.
- [14] Ahmed, Q. *Robust Control Algorithms for Twin Rotor System*. Master thesis of science in Electronic Engineering, Muhammad Ali Jinnah University, Islamabad. June 2009.

## Libros

- [15] Moreno, L., Garido, S., Balaguer, C. *Ingeniería de control. Modelado y control de sistemas dinámicos*. Editorial Ariel, S.A. Barcelona. 2003.
- [16] Leishman, G. J. *Principles of Helicopter Aerodynamics*. Cambridge Aerospace Series. New York, USA. 2006.
- [17] Boyd, S., Ghaoui, L., Feron, E., Balakrishnan, V. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. Society for Industrial and Applied Mathematics. Philadelphia, USA. 1994.
- [18] Goossens, M., Mittelbach, F., Samarin, A. *The Latex Companion*. Addison-Wesley. Indianapolis, USA. 2003.

## Páginas Webs

- <http://www-ma3.upc.es/codalab/fixers/sem/G-Pujol-260506.pdf>
- <http://homepages.laas.fr/henrion/courses/lmi11/>
- <http://www.mathworks.com/help/toolbox/control/getstart/brz18pm.html>

## Otros documentos

- *Twin Rotor MIMO System 33-220 User Manual*. Feedback Instruments Limited, Crowborough, UK. 1998.
- *Twin Rotor MIMO System 33-0007-4M5 Advanced Teaching Manual 1*. Feedback Instruments Limited, Crowborough, UK. 1998.

## APÉNDICE A. REPRESENTACIÓN EN ESPACIO DE ESTADOS SUBMODELOS

### Modelo 1

$$A = \begin{bmatrix} 4,8171e-05 & -0,0025 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,0172 & 0,9993 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,9999 & -0,0051 & -1,0511e-09 & -1,3565e-08 & 0 \\ 0 & 0 & 0,0009 & 0,9999 & 3,8624e-08 & 4,9417e-07 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0,0001 & -0,0025 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,0873 & 0,9972 & 0 \\ -5,9079e-09 & -3,87761e-07 & 0 & 0 & 0 & 0,9999 & -0,0002 \\ 5,5813e-08 & 3,6629e-06 & 0 & 0 & 0 & 0,0009 & 0,9999 \end{bmatrix} \quad (A.1)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1,0621 \\ 0 & 0,1505 \\ -3,4993-09 & 0 \\ 1,3222e-07 & 0 \\ 0,8111 & 0 \\ 0,5899 & 0 \\ 0 & -2,6431e-08 \\ 0 & 2,4977e-07 \end{bmatrix} \quad (A.2)$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (A.3)$$

**Modelo 2**

$$A = \begin{bmatrix} 4,8193e-05 & -0,0025 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,0171 & 0,9986 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1,9523e-07 & 1,2813e-05 & 0,9999 & -0,0051 & -1,0511e-09 & -1,3566e-08 & 3,1629e-4 \\ 8,8403e-11 & 6,4077e-09 & 9,9998e-4 & 0,9999 & 3,8624e-08 & 4,9417e-07 & 1,5815e-07 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1,292e-4 & -0,0025 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,0873 & 0,9972 & 0 \\ -5,2589e-09 & -3,4516e-07 & 4,0473e-09 & 8,0971e-06 & 1,4159e-13 & 2,0011e-12 & 0,9999 \\ 5,4204e-08 & 3,5573e-06 & -4,1726e-08 & -8,3451e-05 & -1,4599e-12 & -2,0629e-11 & 9,999e-4 \end{bmatrix} \quad (A.4)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1,0621 \\ 0 & 0,1505 \\ -3,4996e-09 & 8,7375e-07 \\ 1,3222e-07 & 2,6651e-10 \\ 0,8111 & 0 \\ 0,5899 & 0 \\ 3,2642e-13 & -2,3531e-08 \\ -3,3659e-12 & 2,4259e-07 \end{bmatrix} \quad (A.5)$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (A.6)$$

### Modelo 3

$$A = \begin{bmatrix} 4,8209e-05 & -0,0025 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,017 & 0,9982 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3,445e-07 & 2,2608e-05 & 0,9999 & -0,0049 & -1,0499e-09 & -1,3549e-08 & 9,4171e-4 \\ 1,5601e-10 & 1,1308e-08 & 9,9998e-4 & 0,9999 & 3,8624e-08 & 4,9417e-07 & 4,7086e-07 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1,292e-4 & -0,0025 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,0873 & 0,9972 & 0 \\ -4,4727e-09 & -2,9355e-07 & 4,1836e-09 & 8,3697e-06 & 1,4636e-13 & 2,068e-12 & 0,9999 \\ 5,1952e-08 & 3,4094e-06 & -4,8597e-08 & -9,7194e-05 & -1,7003e-12 & -2,4027e-11 & 9,9996e-4 \end{bmatrix} \quad (A.7)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1,0621 \\ 0 & 0,1504 \\ -3,4968e-09 & 1,5419e-06 \\ 1,3222e-07 & 4,7033e-10 \\ 0,8112 & 0 \\ 0,5899 & 0 \\ 3,3741e-13 & -2,0014e-08 \\ -3,9201e-12 & 2,3253e-07 \end{bmatrix} \quad (A.8)$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (A.9)$$

**Modelo 4**

$$A = \begin{bmatrix} 4,8221e-05 & -0,0025 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,017 & 0,9978 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4,7711e-07 & 3,131e-05 & 0,9999 & -0,0047 & -1,0443e-09 & -1,3469e-08 & 0,0017 & -1,2409e-07 \\ 2,1607e-10 & 1,5661e-08 & 9,9998e-4 & 0,9999 & 3,8624e-08 & 4,9417-07 & 8,6615e-07 & -4,1364e-11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1,292e-4 & -0,0025 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,0873 & 0,9972 & 0 & 0 \\ -3,9683e-09 & -2,6045e-07 & 2,371e-09 & 4,7435e-06 & 8,2951e-14 & 1,1722e-12 & 0,9999 & -1,4326e-4 \\ 5,0289e-08 & 3,3002e-06 & -3,0052e-08 & -6,0104e-05 & -1,0514e-12 & -1,4858e-11 & 9,9996e-4 & 0,9999 \end{bmatrix} \quad (A.10)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1,0621 \\ 0 & 0,1504 \\ -3,4838e-09 & 2,1356e-06 \\ 1,3222e-07 & 6,5143e-10 \\ 0,8112 & 0 \\ 0,5899 & 0 \\ 1,9123e-13 & -1,7758e-08 \\ -2,4242e-12 & 2,2509e-07 \end{bmatrix} \quad (A.11)$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (A.12)$$



**Modelo 5**

$$A = \begin{bmatrix} 4,817e-05 & -0,0025 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,0171 & 0,9993 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5,1657e-14 & 3,3902e-12 & 0,9999 & -0,005 & -1,0508e-09 & -1,3562e-08 & 9,2549e-10 \\ 2,3389e-17 & 1,6953e-15 & 9,9998e-4 & 0,9999 & 3,8617e-08 & 4,9406e-07 & -2,9644e-17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1,2913e-4 & -0,0025 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,0873 & 0,9968 & 0 \\ -5,9078e-09 & -3,8776e-07 & 3,6401e-08 & 7,2802e-05 & 1,5377e-07 & 1,9674e-06 & -1,9216e-4 \\ 5,5813e-08 & 3,6629e-06 & 1,2134e-11 & 3,6402e-08 & 6,965e-11 & 9,8424e-10 & 0,9999 \end{bmatrix} \quad (A.13)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1,0621 \\ 0 & 0,1505 \\ -3,4989e-09 & 2,3117e-13 \\ 1,322e-07 & 7,0508e-17 \\ 0,8112 & 0 \\ 0,5899 & 0 \\ 5,2642e-07 & -2,6431e-08 \\ 1,6059e-10 & 2,4977e-07 \end{bmatrix} \quad (A.14)$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (A.15)$$

**Modelo 6**

$$A = \begin{bmatrix} 4,8193e-05 & -0,0025 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,017 & 0,9986 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1,9523e-07 & 1,2813e-05 & 0,9999 & -0,005 & -1,0295e-09 & -1,3261e-08 & 3,1629e-4 \\ 8,8403e-11 & 6,4078e-09 & 9,9998e-4 & 0,9999 & 3,8616e-08 & 4,9406e-07 & 1,5815e-07 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1,2913e-4 & -0,0025 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,0873 & 0,9968 & 0 \\ -5,2592e-09 & -3,4518e-07 & 3,3087e-08 & 6,6177e-05 & 1,4939e-07 & 1,9113e-06 & 0,9999 \\ 5,4205e-08 & 3,5573e-06 & -4,1719e-08 & -8,3427e-05 & 6,62045e-11 & 9,3555e-10 & 9,9995e-4 \end{bmatrix} \quad (A.16)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1,0621 \\ 0 & 0,1505 \\ -3,4498e-09 & 8,7376e-07 \\ 1,322e-07 & 2,6651e-10 \\ 0,8112 & 0 \\ 0,5899 & 0 \\ 5,1142e-07 & -2,3531e-08 \\ 1,5265e-10 & 2,4259e-07 \end{bmatrix} \quad (A.17)$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (A.18)$$

# Modelo 7

$$A = \begin{bmatrix} 4,8209e-05 & -0,0025 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,017 & 0,9982 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3,445e-07 & 2,2608e-05 & 0,9999 & -0,005 & -9,886e-10 & -1,2683e-08 & 9,4174e-4 \\ 1,5601e-10 & 1,1308e-08 & 9,9999e-4 & 0,9999 & 3,8617e-08 & 4,9406e-07 & 4,7088e-07 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1,2913e-4 & -0,0025 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,0873 & 0,9968 & 0 \\ -4,4724e-09 & -2,9353e-07 & 2,2625e-08 & 4,5252e-05 & 1,4321e-07 & 1,8322e-06 & 0,9999 \\ 5,1951e-08 & 3,4093e-06 & -4,8579e-08 & -9,7151e-05 & 6,3164e-11 & 8,9259e-10 & 9,9996e-4 \end{bmatrix} \quad (A.19)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1,0621 \\ 0 & 0,1505 \\ -3,3555e-09 & 1,5419e-06 \\ 1,3219e-07 & 4,7033e-10 \\ 0,8111 & 0 \\ 0,5899 & 0 \\ 4,9025e-07 & -2,0012e-08 \\ 1,4564e-10 & 2,3253e-07 \end{bmatrix} \quad (A.20)$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (A.21)$$

**Modelo 8**

$$A = \begin{bmatrix} 4,8221e-05 & -0,0025 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,017 & 0,9978 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4,7711e-07 & 3,131e-05 & 0,9999 & -0,0047 & -9,353e-10 & -1,193e-08 & -1,2409e-07 \\ 2,1607e-10 & 1,5661e-08 & 9,9999e-4 & 0,9999 & 3,8617-08 & 4,9406e-07 & -4,1365e-11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1,2913e-4 & -0,0025 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,0873 & 0,9968 & 0 \\ -3,9685e-09 & -2,6046-07 & 1,0517e-08 & 2,1035e-05 & 1,3865e-07 & 1,7739e-06 & -1,4326 \\ 5,0289e-08 & 3,3002e-06 & -3,0067e-08 & -6,01303e-05 & 6,1748e-11 & 8,7257e-10 & 0,9999 \end{bmatrix} \quad (A.22)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1,0621 \\ 0 & 0,1504 \\ -3,2326e-09 & 2,1356e-06 \\ 1,322e-07 & 6,5143-10 \\ 0,8111 & 0 \\ 0,5899 & 0 \\ 4,7465e-07 & -1,7759e-08 \\ 1,4237e-10 & 2,251e-07 \end{bmatrix} \quad (A.23)$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (A.24)$$

**Modelo 9**

$$A = \begin{bmatrix} 4,817e-05 & -0,0025 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,0171 & 0,9993 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3,9045e-13 & 2,5627e-11 & 0,9999 & -1,0506e-09 & -1,356e-08 & 6,996e-09 & -6,7226e-13 \\ 1,768e-16 & 1,2816e-14 & 9,9999e-4 & 3,861e-08 & 4,9397e-07 & 3,4981e-12 & -2,2409e-16 \\ 0 & 0 & 0 & -1,2907e-4 & -0,0025 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,9966 & 0 & 0 & 0 \\ -5,908e-09 & -3,8777e-07 & 1,3e-07 & 2,9058e-07 & 3,7176e-06 & 0,9999 & -1,9217e-4 \\ 5,5813e-08 & 3,663e-06 & 4,3344e-11 & 1,3162e-10 & 1,8599e-09 & 9,9995e-40 & 9,9999 \end{bmatrix} \quad (A.25)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1,0621 \\ 0 & 0,1505 \\ -3,4985e-09 & 1,7475e-12 \\ 1,3218e-07 & 5,3299e-16 \\ 0,8111 & 0 \\ 0,5898 & 0 \\ 9,9481e-07 & -2,6431e-08 \\ 3,0349e-10 & 2,4977e-07 \end{bmatrix} \quad (A.26)$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (A.27)$$

# Modelo 10

$$A = \begin{bmatrix} 4,8193e-05 & -0,0025 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,017 & 0,9986 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1,9523e-07 & 1,2813e-05 & 0,9999 & -0,005 & -1,0103e-09 & -1,299e-08 & 3,1629e-4 \\ 8,8403e-11 & 6,4078e-09 & 9,9999e-4 & 0,9999 & 3,861e-08 & 4,9397e-07 & 1,5815-07 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1,2906e-4 & -0,0025 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,0873 & 0,9965 & 0 \\ -5,2593e-09 & -3,4518e-07 & 1,0778e-07 & 2,1556e-4 & 2,8229e-07 & 3,6116e-06 & 0,9999 \\ 5,4205e-08 & 3,5573e-06 & -4,1695e-08 & -8,3354e-05 & 1,2641e-10 & 1,7863e-09 & 9,9995e-4 \\ & & & & & & -1,7614e-4 \\ & & & & & & 0,9999 \end{bmatrix} \quad (A.28)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1,0621 \\ 0 & 0,1505 \\ -3,4055e-09 & 8,7376e-07 \\ 1,3218e-07 & 2,6651e-10 \\ 0,8111 & 0 \\ 0,5898 & 0 \\ 9,6644e-07 & -2,3532e-08 \\ 2,9146e-10 & 2,426e-07 \end{bmatrix} \quad (A.29)$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (A.30)$$

**Modelo 11**

$$A = \begin{bmatrix} 4,8209e-05 & -0,0025 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,017 & 0,9982 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3,445e-07 & 2,2608e-05 & 0,9999 & -0,005 & -9,3408e-10 & -1,1912e-08 & 9,4174e-4 \\ 1,56e-10 & 1,1308e-08 & 9,9999e-4 & 0,9999 & 3,861e-08 & 4,9398e-07 & 4,7088e-07 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1,2906e-4 & -0,0025 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,0873 & 0,9966 & 0 \\ -4,4724e-09 & -2,9353e-07 & 7,0054e-08 & 1,4011e-4 & 2,7061e-07 & 3,4621e-06 & 0,9999 \\ 5,1951e-08 & 3,4093e-06 & -4,8562e-08 & -9,7101e-05 & 1,2088e-10 & 1,7081e-09 & 9,9996e-4 \\ & & & & & & -1,5629e-4 \\ & & & & & & 0,9999 \end{bmatrix} \quad (A.31)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1,0621 \\ 0 & 0,1505 \\ -3,2297e-09 & 1,5419e-06 \\ 1,3218e-07 & 4,7033e-10 \\ 0,8111 & 0 \\ 0,5898 & 0 \\ 9,2644e-07 & -2,0012e-08 \\ 2,7871e-10 & 2,3252e-07 \end{bmatrix} \quad (A.32)$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (A.33)$$

**Modelo 12**

$$A = \begin{bmatrix} 4,8221e-05 & -0,0025 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,017 & 0,9978 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4,7712e-07 & 3,1311e-05 & 0,9999 & -0,0047 & -8,3833e-10 & -1,0559e-08 & 0,0017 & -1,2409e-07 \\ 2,1607e-10 & 1,5661e-08 & 9,9999e-4 & 0,9999 & 3,861e-08 & 4,9397e-07 & 8,6614e-07 & -4,1365e-11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1,2906e-4 & -0,0025 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,0873 & 0,9965 & 0 & 0 \\ -3,9686e-09 & -2,6046e-07 & 3,1472e-08 & 6,2945e-05 & 2,6199e-07 & 3,3519e-06 & 0,9999 & -1,4327e-4 \\ 5,029e-08 & 3,3e-06 & -3,0067e-08 & -6,0123e-05 & 1,1762e-10 & 1,6621e-09 & 9,9996e-4 & 0,9999 \end{bmatrix} \quad (A.34)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1,0621 \\ 0 & 0,1504 \\ -3,0089e-09 & 2,1356e-06 \\ 1,3218e-07 & 6,5143e-10 \\ 0,8111 & 0 \\ 0,5898 & 0 \\ 8,9696e-07 & -1,7759e-08 \\ 2,7121e-10 & 2,2509e-07 \end{bmatrix} \quad (A.35)$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (A.36)$$



### Modelo 13

$$A = \begin{bmatrix} 4,817e-05 & -0,0025 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,017 & 0,9993 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6,5027e-13 & -4,2676e-11 & 0,9999 & -0,005 & -1,0505e-09 & -1,3557e-08 & -1,165e-08 \\ -2,9443e-16 & -2,1341e-14 & 9,9999e-4 & 0,9999 & 3,8604e-08 & 4,9389e-07 & -5,8252e-12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1,29e-4 & -0,0025 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,0873 & 0,9961 & 0 \\ -5,9081e-09 & -3,8778e-07 & 2,6534e-07 & 5,3068e-4 & 4,1502e-07 & 5,3096e-06 & -1,9217e-4 \\ 5,5813e-08 & 3,663e-06 & 8,8449e-11 & 2,6535e-07 & 1,8799e-10 & 2,6566e-09 & 0,9999 \end{bmatrix} \quad (A.37)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1,0621 \\ 0 & 0,1505 \\ -3,4982e-09 & -2,91e-12 \\ 1,3217e-07 & -8,8758e-16 \\ 0,8111 & 0 \\ 0,58967 & 0 \\ 1,4209e-06 & -2,6432e-08 \\ 4,3349e-10 & 2,4977e-07 \end{bmatrix} \quad (A.38)$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (A.39)$$

**Modelo 14**

$$A = \begin{bmatrix} 4,8193e-05 & -0,0025 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,017 & 0,9986 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1,9523e-07 & 1,2812e-05 & 0,9999 & -0,005 & -9,9282e-10 & -1,2742e-08 & 3,1629e-4 \\ 8,8403e-11 & 6,4078e-09 & 9,9999e-4 & 0,9999 & 3,8604e-08 & 4,9388e-07 & 1,5815e-07 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1,29e-4 & -0,0025 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,0873 & 0,9961 & 0 \\ -5,2592e-09 & -3,4518e-07 & 2,1571e-07 & 4,3142e-4 & 4,0318e-07 & 5,1582e-06 & 0,9999 \\ 5,4205e-08 & 3,5573e-06 & -4,1659e-08 & -8,3246e-05 & 1,8118e-10 & 2,5602e-09 & 9,9995e-4 \end{bmatrix} \quad (A.40)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1,0621 \\ 0 & 0,1505 \\ -3,3652e-09 & 8,7376e-07 \\ 1,3217e-07 & 2,6651e-10 \\ 0,8111 & 0 \\ 0,5897 & 0 \\ 1,3804e-06 & -2,3532e-08 \\ 4,1776e-10 & 2,4256e-07 \end{bmatrix} \quad (A.41)$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (A.42)$$

**Modelo 15**

$$A = \begin{bmatrix} 4,8209e-05 & -0,0025 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,017 & 0,9981 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3,4459e-07 & 2,2614e-05 & 0,9999 & -0,005 & -8,8442e-10 & -1,1211e-08 & 9,4204e-4 \\ 1,5605e-10 & 1,1311e-08 & 9,9999e-4 & 0,9999 & 3,8604e-08 & 4,9389e-07 & 4,7103e-07 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1,2901e-4 & -0,0025 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,0873 & 0,9961 & 0 \\ -4,4721e-09 & -2,9351e-07 & 1,3854e-07 & 2,7708e-4 & 3,8649e-07 & 4,9446e-06 & -1,5628e-4 \\ 5,195e-08 & 3,4093e-06 & -4,853e-08 & -9,7014e-05 & 1,7338e-10 & 2,45e-09 & 0,9999 \end{bmatrix} \quad (A.43)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1,0621 \\ 0 & 0,1505 \\ -3,1152e-09 & 1,5423e-06 \\ 1,3217e-07 & 4,7045e-10 \\ 0,8111 & 0 \\ 0,5897 & 0 \\ 1,3232e-06 & -2,0011e-08 \\ 3,9977e-10 & 2,3252e-07 \end{bmatrix} \quad (A.44)$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (A.45)$$

**Modelo 16**

$$A = \begin{bmatrix} 4,8221e-05 & -0,0025 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,017 & 0,9978 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4,7703e-07 & 3,1305e-05 & 0,9999 & -0,0047 & -7,5015e-10 & -9,3132e-09 & 0,0017 \\ 2,1603e-10 & 1,5659e-08 & 9,9999e-4 & 0,9999 & 3,8604e-08 & 4,9389e-07 & 8,6608e-07 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1,2901e-4 & -0,0025 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,0873 & 0,9961 & 0 \\ -3,9687e-09 & -2,6047e-07 & 6,1772e-08 & 1,2354e-4 & 3,742e-07 & 4,7874e-06 & 0,9999 \\ 5,029e-08 & 3,3003e-06 & -3,0074e-08 & -6,0127e-05 & 1,6846e-10 & 2,3804e-09 & 9,9996e-4 \end{bmatrix} \begin{matrix} -1,2409e-07 \\ -4,1363e-11 \\ 0 \\ 0 \\ -1,4327e-4 \\ 0,9999 \end{matrix} \quad (A.46)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1,0621 \\ 0 & 0,1504 \\ -2,8056e-09 & 2,1352e-06 \\ 1,3217e-07 & 6,5132e-10 \\ 0,8111 & 0 \\ 0,5897 & 0 \\ 1,2812e-06 & -1,776e-08 \\ 3,8842e-10 & 2,251e-07 \end{bmatrix} \quad (A.47)$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (A.48)$$

## APÉNDICE B. CÓDIGO MATLAB

### B.1. Función de comparación

```
function x=comparacion(u)
wm=u(1);
wt=u(2);
```

```
wm1=0;
wm2=77.1022;
wm3=127.9951;
wm4=168.9115;
wt1=0;
wt2=103.6318;
wt3=195.8581;
wt4=279.7779;
```

```
if wt<wt1
n1=1;
n2=0;
n3=0;
n4=0;
elseif and(wt>=wt1,wt<wt2)
n1=(wt2-wt)/(wt2-wt1);
n2=1-n1;
n3=0;
n4=0;
elseif and(wt>=wt2,wt<wt3)
n1=0;
n2=(wt3-wt)/(wt3-wt2);
n3=1-n2;
n4=0;
elseif and(wt>=wt3,wt<wt4)
n1=0;
n2=0;
n3=(wt4-wt)/(wt4-wt3);
n4=1-n3;
elseif wt>=wt4
n1=0;
n2=0;
n3=0;
n4=1;
end
```

```
if wm<wm1
m1=1;
m2=0;
m3=0;
m4=0;
elseif and(wm>=wm1,wm<wm2)
m1=(wm2-wm)/(wm2-wm1);
m2=1-m1;
m3=0;
m4=0;
elseif and(wm>=wm2,wm<wm3)
m1=0;
m2=(wm3-wm)/(wm3-wm2);
m3=1-m2;
m4=0;
elseif and(wm>=wm3,wm<wm4)
m1=0;
m2=0;
m3=(wm4-wm)/(wm4-wm3);
m4=1-m3;
elseif wm>=wm4
m1=0;
m2=0;
m3=0;
m4=1;
end
```

```
x(1,1)=n1*m1;
x(1,2)=n1*m2;
x(1,3)=n1*m3;
x(1,4)=n1*m4;
x(1,5)=n2*m1;
x(1,6)=n2*m2;
x(1,7)=n2*m3;
x(1,8)=n2*m4;
x(1,9)=n3*m1;
x(1,10)=n3*m2;
x(1,11)=n3*m3;
x(1,12)=n3*m4;
x(1,13)=n4*m1;
x(1,14)=n4*m2;
x(1,15)=n4*m3;
x(1,16)=n4*m4;
```

## B.2. Función para el cálculo de las ganancias del observador de estado

```
function [L1,PolesL1]=LMlobs(A1,C1,Q,R)
[state null] = size(A1);
[dimC null] = size(C1);
setlmis([])
X1 = lmivar(1,[state 1]);
L-1 = lmivar(2,[dimC state]);
lmiterm([1 1 1 X1],-R,1,'s');
lmiterm([1 1 2 X1],Q,1);
lmiterm([1 1 2 -X1],1,A1);
lmiterm([1 1 2 -L-1],-1,C1);
lmiterm([1 2 1 X1],Q,1);
lmiterm([1 2 1 X1],A1',1);
lmiterm([1 2 1 L-1],-C1',1);
lmiterm([1 2 2 X1],-R,1,'s');
lmiterm([-9 1 1 X1],1,1,'s')
lmis = getlmis;
[tmin,xfeas] = feasp(lmis,[0 0 0 0 1],0);
X1 = dec2mat(lmis,xfeas,X1);
L-1 = dec2mat(lmis,xfeas,L-1);
L1 = (L1 * inv(X1))';
PolesL1 = eig(A1 - L1 * C1);
```

## B.3. Función para el cálculo de las ganancias del controlador

```
function [K1,PolesK1]=LMlobs(A1,C1,Q,R)
[state1 g] = size(A1);
[dimB g] = size(B1);
setlmis([])
X1 = lmivar(1,[state1 1]);
W-1 = lmivar(2,[dimB state1]);
lmiterm([1 1 1 X1],-R,1,'s');
lmiterm([1 1 2 X1],Q,1);
lmiterm([1 1 2 -X1],1,A1');
lmiterm([1 1 2 -W-1],-1,B1');
lmiterm([1 2 1 X1],Q,1);
lmiterm([1 2 1 X1],A1',1);
lmiterm([1 2 1 L-1],-B1,1);
lmiterm([1 2 2 X1],-R,1,'s');
```

```

lmiterm([-9 1 1 X1],1,1,'s')
lmis = getlmis;
[tmin,xfeas] = feasp(lmis,[0 0 0 0 1],0);
X1 = dec2mat(lmis,xfeas,X1);
W-1 = dec2mat(lmis,xfeas,W-1);
K1 = (K1 * X1 - 1);
PolesK1 = eig(A1 - B1 * K1);

```